高等数学竞赛题解析教程(2017)

(本科适用)

主编：陈　仲
编者：陈　仲　张玉莲　林小围
王夕予　王　培

东南大学出版社
·南京·

前　言

高等数学(或称大学数学)是一年级大学生的基础课程,江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会从1991年以来,已成功组织了十三届全省性的大学生高等数学竞赛。参赛学校为全省普通高等学校,含师范学院、地方工学院、独立学院、各重点高校的二级学院、各类职业技术学院、高等专科学校、职业大学等,共计100多所,考生达13000多人,参赛类别分为本科一级、本科二级、本科三级、本科四级、专科等五类。

高等数学竞赛的宗旨是贯彻教育部关于本科要注重素质教育的指示,加强普通高校的数学教学工作,推动高等数学的教学改革,提高教学质量。高等数学竞赛能激励大学生们学习高等数学的兴趣,活跃思想,它要求学生比较系统地理解高等数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书根据江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会制订的高等数学竞赛大纲,并参照教育部制订的考研数学考试大纲编写而成,内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题,每个专题含"基本概念与内容提要"、"竞赛题与精选题解析"、"练习题"三个部分。其中,竞赛题选自江苏(1—13届)、北京(1—15届)、浙江(1—10届)、广东、陕西、上海、天津等省市大学生数学竞赛试题;全国大学生数学竞赛试题(1—7届预赛和决赛);清华大学、南京大学、上海交通大学、西安交通大学、天津大学、北京邮电大学等高校大学生数学竞赛试题;莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题。这些试题中既含基本题,又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题,它们构思绝妙,方法灵活,技巧性强,本书逐条解析,并对重要题目深入分析,总结解题方法与技巧。还有些"好题"在现有的竞赛题中没有出现过,为此本书在每个专题中都补充了不少"精选题",大大丰富了本书的内涵。

本书先后推出2012年版、2013年版和2016年版,皆受到广大教师和学生的赞许。此次修订的重点是"竞赛题与精选题解析"部分,删去了旧版中的一些陈题,增选了江苏省第十三届、全国大学生(6—7届预赛和决赛)数学竞赛试题,并修改了以往解析中的一些疏漏。

本书可供准备本科高等数学竞赛的老师和学生作为应试教程,也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书,特别有益于成绩优秀的大学

生提高高等数学水平。

在编写本书过程中，编者得到南京大学许绍溥教授、姜东平教授、姚天行教授、丁南庆教授、周国飞教授等的支持与帮助，得到东南大学王栓宏教授、黄骏教授，成贤学院董梅芳教授，扬州大学刘金林教授、蒋国强教授，江南大学曹菊生教授，南通大学郭跃华教授，江苏大学李医民教授，苏州大学侯绳照教授，南京理工大学王为群教授，紫金学院刘德钦教授、朱顺荣教授，河海大学朱永忠教授，南京林业大学蒋华松教授，中国矿业大学张兴永教授，常州大学石澄贤教授，淮阴工学院胡平教授，淮海工学院谭飞教授等的一贯支持，编者谨此一并表示衷心的感谢。编者还要感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校，使本书质量大有提高。

书中错误难免，敬请智者不吝赐教。

陈　仲

2016 年 10 月于南京大学

目　录

专题 1　函数与极限

1.1　基本概念与内容提要

1.1.1　一元函数基本概念

1）利用已知条件求函数的表达式.

2）函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性.

3）基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数）和初等函数.

4）反函数、复合函数、参数式函数、隐函数.

5）分段函数.

1.1.2　数列的极限

1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$ 的定义：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

2）收敛数列的性质

定理 1（惟一性）　若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，则其极限 A 是惟一的.

定理 2（有界性）　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 为有界数列.

定理 3（保向性）　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A > 0 (< 0)$，则 $\exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，有

$$x_n > 0 \quad (< 0)$$

1.1.3　函数的极限

1）六种极限过程下函数极限的定义

$$\lim_{x\to a}f(x) = A,\quad \lim_{x\to a+}f(x) = A,\quad \lim_{x\to a-}f(x) = A$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x) = A,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x) = A$$

例如　$\lim\limits_{x\to a}f(x) = A$ 的定义：$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$，当 $0 < |x - a| < \sigma$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

定理 1　$\lim\limits_{x\to a}f(x) = A \iff f(a-) = A,\quad f(a+) = A.$

定理 2　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A \iff f(-\infty) = A,\quad f(+\infty) = A.$

2）函数极限的性质

定理 3（惟一性）　在某一极限过程下，若函数 $f(x)$ 的极限存在，则其极限是惟一的.

定理 4（有界性）　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，则存在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}$，使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}$ 上有界.

定理 5（保向性）　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0(<0)$，则存在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}$，使得 $x\in\mathring{U}$ 时 $f(x)>0(<0)$.

1.1.4　证明数列或函数极限存在的方法

定理 1（夹逼准则）　设三个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

定理 2（夹逼准则）　设三个函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域中满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

注　对于其他的极限过程，类似的结论留给读者自己写出.

定理 3（单调有界准则）　若数列 $\{x_n\}$ 单调增加，并有上界（或单调减少，并有下界），则数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

1.1.5　无穷小量

1）若在某极限过程中（$x\to a$，$x\to a+$，$x\to a-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 中任一个），某变量或函数 $\alpha(x)\to 0$，则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程下的**无穷小量**，简称**无穷小**. 在同一极限过程中的有限个无穷小量之和仍为无穷小量；在同一极限过程中的有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量；无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量. 例如

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\quad\left(\text{因 }x\to 0,\sin\frac{1}{x}\text{ 有界}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\quad\left(\text{因}\frac{1}{x}\to 0,\sin x\text{ 有界}\right)$$

定理　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，这里 $x\to a$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小量.

2）无穷小的比较

假设在某极限过程中（以 $x\to a$ 为例），α，β 都是无穷小量.

（1）若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$，则称 α 是 β 的**高阶无穷小**，记为 $\alpha=o(\beta)$.

（2）若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to\infty$，则称 α 是 β 的**低阶无穷小**.

（3）若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to c(c\neq 0,c\in\mathbf{R})$，则称 α 与 β 为**同阶无穷小**. 特别，当 $c=1$ 时，称 α 与 β 为**等价无穷小**，记为 $\alpha\sim\beta(x\to a)$.

(4) 若 $\frac{\alpha}{x^k} \to c(c \neq 0, k > 0)$,则称 α 是 x 的 **k 阶无穷小**. 此时 $\alpha \sim cx^k$,称 cx^k 为 α **的无穷小主部**.

1.1.6 无穷大量

1) 当 $n \to \infty$ 时,下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n, \quad n^{\alpha}(\alpha > 0), \quad n^{\beta}(\beta > \alpha > 0), \quad a^n(a > 1), \quad n^n$$

2) 当 $x \to +\infty$ 时,下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x, \quad x^{\alpha}(\alpha > 0), \quad x^{\beta}(\beta > \alpha > 0), \quad a^x(a > 1), \quad x^x$$

1.1.7 求数列或函数的极限的方法

1) 四则运算法则
2) 利用夹逼准则求极限
3) 先利用单调有界准则证明数列的极限存在,再求其极限
4) 利用两个重要极限求极限

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \qquad \lim_{\square \to 0}(1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$$

例如 $\lim_{x \to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \lim_{x \to 0}(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = e$ (这里$\square = \cos x - 1$)

5) 利用等价无穷小代换求极限

定理 当$\square \to 0$ 时,有下列无穷小的等价性:

$$\square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan x \sim \arctan \square \sim \ln(1 + \square) \sim e^{\square} - 1$$

$$(1 + \square)^{\lambda} - 1 \sim \lambda \square \quad (\lambda > 0)$$

$$1 - \cos \square \sim \frac{1}{2} \square^2$$

6) 利用洛必达法则求极限(关于洛必达法则见第 2.1 节)
7) 利用马克劳林展开求极限(关于马克劳林展式见第 2.1 节)
8) 利用导数的定义求极限
9) 利用定积分的定义求极限

1.1.8 函数的连续性

1) 函数 $f(x)$ 连续的定义:设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义,若$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,则称 $f(x)$ **在 $x = a$ 处连续**;若函数 $f(x)$ 在某区间(a,b) 上每一点皆连续,称 $f(x)$ **在(a,b) 上连续**,记为 $f \in C(a,b)$;若 $f(x)$ 在(a,b) 上连续,且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处**右连续**(即 $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$),在 $x = b$ 处**左连续**(即 $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$),则称

$f(x)$ **在$[a,b]$上连续**，记为 $f \in C[a,b]$.

2) 连续函数的四则运算性质

3) 复合函数的极限与连续性

定理 1 若$\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$，函数 $f(x)$ 在 $x = b$ 处连续，则

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to a} \varphi(x)) = f(b)$$

定理 2 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续，函数 $f(x)$ 在 $x = b = \varphi(a)$ 处连续，则 $f(\varphi(x))$ 在 $x = a$ 处连续，即有

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a))$$

定理 3 初等函数在其有定义的区间上连续.

4) 间断点的分类

若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续，则称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的**间断点**. 间断点分为两类：

(1) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 皆存在时，称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 若 $f(a-) = f(a+)$，称 $x = a$ 为**可去型**；若 $f(a-) \neq f(a+)$，称 $x = a$ 为**跳跃型**.

(2) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 中至少有一个不存在时，称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

5) 闭区间上的连续函数的性质

定理 4(有界定理) 若 $f \in C[a,b]$，则 $\exists K > 0$，使得 $\forall x \in [a,b]$，$|f(x)| \leqslant K$.

定理 5(最值定理) 若 $f \in C[a,b]$，则 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$，使得

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

定理 6(零点定理) 若 $f \in C[a,b]$，$f(a)f(b) < 0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$(称 $x = \xi$ 为函数 $f(x)$ 的零点).

1.2 竞赛题与精选题解析

1.2.1 求函数的表达式(例 1.1—1.3)

例 1.1(江苏省 2004 年竞赛题) 已知函数 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数，且当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$时 $f(x) = \sin x - \cos x + 2$，则当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$时 $f(x) =$ ________.

解析 因 $f(x)$ 为奇函数，所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) = -(\sin(-x) - \cos(-x) + 2) \\ &= \sin x + \cos x - 2 \end{aligned}$$

又因为 $f(x)$ 是周期为 π 的函数，所以当$\frac{\pi}{2} < x < \pi$时

$$f(x)=f(x-\pi)=\sin(x-\pi)+\cos(x-\pi)-2$$
$$=-\sin x-\cos x-2$$

例 1.2(江苏省 1991 年竞赛题)　函数 $y=\sin x\,|\sin x|\left(\text{其中}\,|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数为______.

解析　当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时 $y=\sin^2 x$，即 $\sin x=\sqrt{y}\ (0\leqslant y\leqslant 1)$，所以 $x=\arcsin\sqrt{y}(0\leqslant y\leqslant 1)$；当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$ 时 $y=-\sin^2 x(-1\leqslant y\leqslant 0)$，所以 $\sin^2 x=-y$，$\sin x=-\sqrt{-y}$，$x=\arcsin(-\sqrt{-y})=-\arcsin(\sqrt{-y})\ (-1\leqslant y\leqslant 0)$.于是所求反函数为

$$y=\begin{cases}\arcsin\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -\arcsin(\sqrt{-x}), & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

注　若利用公式 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$，类似的分析可得所求反函数为

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}\arccos(1-2x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -\frac{1}{2}\arccos(1+2x), & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

例 1.3(莫斯科经济统计学院 1975 年竞赛题)　求

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

的表达式，并作函数 $f(x)$ 的图象.

解析　当 $0\leqslant|x|<1$ 时，$f(x)=(1+0+0)^0=1$；

当 $x=1$ 时，$f(1)=(2+0)^0=1$；

当 $x=-1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+(-1)^{2n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}=(2+0)^0=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+(-1)^{2n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}=\frac{1}{2}$$

所以 $x=-1$ 时 $f(x)$ 无定义；

当 $1<x\leqslant 2$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x$$

当 $x=2$ 时

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[n]{2+\frac{1}{2^n}}=2(2+0)^0=2$$

当 $|x|>2$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}=\frac{x^2}{2}$$

当 $-2<x<-1$ 时，由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+x^{2n}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n}}&=\lim_{n\to\infty}(-x)\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{x^{2n}}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}\\&=(-x)(0+1+0)^0=-x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1}}&=\lim_{n\to\infty}x\cdot\sqrt[2n+1]{\frac{1}{x^{2n+1}}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}\\&=x\cdot(0+1+0)^0=x\end{aligned}$$

所以 $-2<x<-1$ 时 $f(x)$ 无定义；

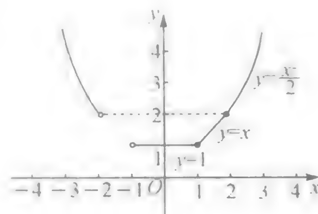
当 $x=-2$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+(-2)^{2n}+(2)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{2^{2n}}+2}=2\cdot(0+2)^0=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+(-2)^{2n+1}+2^{2n+1}}=1^0=1$$

所以 $x=-2$ 时 $f(x)$ 无定义.

函数 $f(x)$ 的图象如右图所示.



1.2.2 利用四则运算求极限(例 1.4—1.16)

例 1.4(江苏省 2008 年竞赛题) 当 $a=$ ________，$b=$ ________时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

解析 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=\frac{a+2}{b-1}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

所以 $a+2=1-b$；又因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=\frac{a-2}{b+1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

所以 $a-2=b+1$.

由上，解得 $a=1,b=-2$.

例 1.5(莫斯科经济统计学院 1977 年竞赛题)　设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$,求 λ,μ.

解析　由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu}{x}=0$,可得

$$\lambda=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1$$

$$\mu=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=\lim_{x\to\infty}x\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{3x^3}\right)=0$$

例 1.6(精选题)　设 $f(x)$ 是 x 的三次多项式,且

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=1,\quad \lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1\quad(a\neq 0)$$

求 $\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

解析　设 $f(x)=A(x-2a)(x-3a)(x-4a)$,则

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 2a}A(x-3a)(x-4a)=2Aa^2=1$$

$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to 4a}A(x-2a)(x-3a)=2Aa^2=1$$

由此可得

$$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to 3a}A(x-2a)(x-4a)=-Aa^2=-\frac{1}{2}$$

例 1.7(江苏省 2012 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^4\left(\dfrac{3}{n^3}-\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{1}{(n+i)^3}\right)$.

解析　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4\left(\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{(n+1)^3}\right)+n^4\left(\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{(n+2)^3}\right)+n^4\left(\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{(n+3)^3}\right)\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4(3n^2+3n+1)}{n^3(n+1)^3}+\frac{n^4(6n^2+12n+8)}{n^3(n+2)^3}+\frac{n^4(9n^2+27n+27)}{n^3(n+3)^3}\right)$$

$$=3+6+9=18$$

例 1.8(江苏省 2012 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot|1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n|$.

解析　令 $x_n=\dfrac{1}{n}\cdot|1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}n|$,则

$$x_{2n}=\frac{1}{2n}\cdot|1-2+3-\cdots+(2n-1)-2n|$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot |(1+3+\cdots+(2n-1))-(2+4+\cdots+2n)|$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot |n^2-(n^2+n)| = \frac{1}{2}$$

$$x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot |1-2+3-\cdots-2n+(2n+1)|$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot |(1+3+\cdots+(2n+1))-(2+4+\cdots+2n)|$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot |(n^2+2n+1)-(n^2+n)| = \frac{n+1}{2n+1}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{1}{2}$，故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot |1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}n| = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

例 1.9(莫斯科公路学院 1976 年竞赛题)　求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

解析　由于

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{2}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

所以

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\cdot 1}-\frac{2}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2(n-1)}-\frac{2}{2\cdot n}+\frac{1}{2(n+1)}\right)+\left(\frac{1}{2n}-\frac{2}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{2}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{2}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)} \to \frac{1}{4} \quad (n\to\infty)$$

即原式 $= \frac{1}{4}$.

例 1.10(浙江省 2002 年竞赛题)　设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

解析 应用反正切函数的和角公式,有

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2\cdot 2^2}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\arctan\frac{2}{3}$$

$$\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{2\cdot 3^2}=\arctan\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\arctan\frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$\arctan\frac{n-1}{n}+\arctan\frac{1}{2\cdot n^2}=\arctan\frac{\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2n^2}}{1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2n^2}}=\arctan\frac{n(2n^2-2n+1)}{2n^3-n+1}$$

$$=\arctan\frac{n}{n+1}$$

所以 $S_n=\arctan\frac{n}{n+1}$,则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}$$

例 1.11(莫斯科电子技术学院 1975 年竞赛题) 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

解析 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)((k+1)^2-(k+1)+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1)}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}$$

例 1.12(莫斯科民族友谊大学 1977 年竞赛题) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

解析 由于

$$k^3+6k^2+11k+5=(k+1)(k+2)(k+3)-1$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{5!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{6!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{7!}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{(n-3)!}-\frac{1}{n!}\right)+\left(\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)$$

$$=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}$$

$$\to 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}\quad(n\to\infty)$$

即原式 $=\dfrac{5}{3}$.

例 1.13(江苏省2014年竞赛题)　设对每一个 j,$\{f_j(k)\}_{k=1}^{\infty}$ 都是无穷小数列,其中 $j=1,2,3,\cdots$. 现定义 $z_k=\lim\limits_{n\to\infty}\{f_1(k)f_2(k)\cdots f_n(k)\}$,若 $\{z_k\}$ 是一个数列,则 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$ 是否一定成立?若一定成立,给出证明;若不一定成立,举一反例.

解析　$\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$ 不一定成立. 反例如下:

当 $j=1$ 时,设

$$f_1(k)=\frac{1}{k},\quad k=1,2,\cdots$$

当 $j\geqslant 2$ 时,设

$$f_j(k)=\begin{cases}1, & k<j,\\ j^{j-1}, & k=j,\\ \dfrac{1}{k}, & k>j\end{cases}$$

即

$$f_1(k):1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots$$

$$f_2(k):1,2,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots$$

$$f_3(k):1,1,3^2,\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots$$

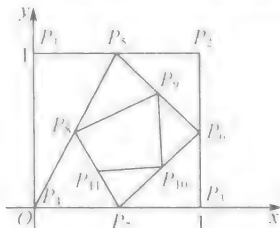
$$\vdots$$

$$f_n(k):1,1,1,1,\cdots,n^{n-1},\frac{1}{n+1},\cdots$$

$$\vdots$$

则 $z_k=\lim\limits_{n\to\infty}\{f_1(k)f_2(k)\cdots f_n(k)\}=1$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=1$.

例 1.14（浙江省 2003 年竞赛题）　如图所示，从正方形四个顶点 $P_1(0,1)$，$P_2(1,1)$，$P_3(1,0)$，$P_4(0,0)$ 开始构造 P_5，P_6，…，使得 P_5 为 P_1P_2 的中点，P_6 为 P_2P_3 的中点，P_7 为 P_3P_4 的中点. 以此类推，我们便得到点 $\{P_n\}$ 收敛于正方形内部一点 P_0，试求 P_0 的坐标.



解析　设点 P_n 的坐标为 $P_n(x_n,y_n)$，则

$$2x_n=x_{n-4}+x_{n-3}$$

$$2x_{n+1}=x_{n-3}+x_{n-2}$$

$$2x_{n+2}=x_{n-2}+x_{n-1}$$

$$2x_{n+3}=x_{n-1}+x_n$$

四式相加得

$$\begin{aligned}&x_n+2(x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3})\\&=x_{n-4}+2(x_{n-3}+x_{n-2}+x_{n-1})=x_{n-8}+2(x_{n-7}+x_{n-6}+x_{n-5})\\&=\cdots=x_1+2(x_2+x_3+x_4)=0+2(1+1+0)=4\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{4}{7}$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{3}{7}$，即 P_0 的坐标为 $P_0\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{3}{7}\right)$.

注：若题中未说 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0，则还需证明 $\{P_n\}$ 的收敛性.

例 1.15（江苏省 1991 年竞赛题）　已知一点先向正东移动 a m，然后左拐弯移动 aq m（其中 $0<q<1$），如此不断重复左拐弯，使得后一段移动距离为前一段的 q 倍，这样该点有一极限位置，试问该极限位置与原出发点相距多少米？

解析　设出发点为坐标原点 $O(0,0)$，移动 n 次到达点 (x_n,y_n). 根据移动规则，得 $x_1=a$，$x_2=a$，$x_3=a-aq^2$，$x_4=a-aq^2$，$x_5=a-aq^2+aq^4$，$x_6=x_5$，$x_7=a-aq^2+aq^4-aq^6$，$x_8=x_7$，…，归纳得

$$x_{2n-1}=a-aq^2+aq^4-\cdots+(-1)^{n-1}aq^{2(n-1)},\quad x_{2n}=x_{2n-1}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\frac{a}{1+q^2}$$

同样，根据移动规则得 $y_1=0$，$y_2=aq$，$y_3=y_2$，$y_4=aq-aq^3$，$y_5=y_4$，$y_6=aq-aq^3+aq^5$，$y_7=y_6$，…，归纳得

$$y_{2n}=aq-aq^3+\cdots+(-1)^{n-1}aq^{2n-1},\quad y_{2n-1}=y_{2n}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}y_{2n}=\lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=\frac{aq}{1+q^2}$$

故极限位置为 $\left(\dfrac{a}{1+q^2},\dfrac{aq}{1+q^2}\right)$，它与原点的距离为

$$d=\sqrt{\left(\frac{a}{1+q^2}\right)^2+\left(\frac{aq}{1+q^2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{1+q^2}}$$

例 1.16(上海交通大学 1991 年竞赛题)　设 $x_1=1,x_2=2$,且

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n}\quad (n=1,2,\cdots)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析　令 $y_n=\ln x_n$,则由 $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n}$ 得

$$y_{n+2}=\frac{1}{2}(y_{n+1}+y_n)$$

故

$$y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(y_n-y_{n-1})$$

$$=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(y_2-y_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2$$

移项得

$$y_{n+2}=y_{n+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2=y_n+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ln 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2$$

$$=\cdots=y_1+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0\ln 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\ln 2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2\right]$$

$$=\ln 2\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$=\ln 2\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\ln 2$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+2}=\frac{2}{3}\ln 2\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{2}{3}\ln 2$,于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+2}=\lim_{n\to\infty}e^{y_{n+2}}=2^{\frac{2}{3}}$$

1.2.3　利用夹逼准则与单调有界准则求极限(例 1.17—1.26)

例 1.17(江苏省 2006 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right)$.

解析　利用夹逼准则,令 $x_n=\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}$,由于

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2}\leqslant x_n\leqslant\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+1}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+1}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2}=\frac{1}{3}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}$.

例 1.18(南京大学 1995 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解析　由于 $\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1$,当 $x>0$ 时

$$x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1<x\left[\frac{1}{x}\right]+x$$

由左边不等式推知 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$,由右边不等式推知 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant 1$,所以

$$\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

当 $x<0$ 时

$$x\left[\frac{1}{x}\right]+x<1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]$$

由左边不等式推知 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$,由右边不等式推知 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant 1$,所以

$$\lim_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

因而 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

例 1.19(南京工业大学 2009 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

解　原式 $=1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!}$,由于

$$0<\frac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!}=\frac{1!+2!+\cdots+(n-2)!+(n-1)!}{n!}$$

$$<\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!}{n!}<\frac{2(n-1)!}{n!}=\frac{2}{n}$$

因为 $\frac{2}{n}\to 0$,由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!}=0$,故原式 $=1+0=1$.

例 1.20(浙江省 2007 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}$.

解析　$\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\Big[\frac{2!}{n}+\frac{3!}{n(n-1)}+\frac{4!}{n(n-1)(n-2)}$

$$+\cdots+\frac{(n-1)!}{n(n-1)\cdots 3}+\frac{n!}{n!}\Big]$$

令

$$x_n=\frac{2!}{n}+\frac{3!}{n(n-1)}+\frac{4!}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{(n-1)!}{n(n-1)\cdots 3}+\frac{n!}{n!}\quad(n=2,3,\cdots)$$

则

$$x_{2n}=\frac{2!}{2n}+\frac{3!}{2n(2n-1)}+\cdots+\frac{n!}{2n(2n-1)\cdots(n+2)}$$
$$+\frac{(n+1)!}{2n(2n-1)\cdots(n+1)}+\cdots+\frac{(2n-1)!}{2n(2n-1)\cdots 3}+1$$

由于

$$\frac{k!}{2n(2n-1)\cdots(2n-k+2)}=\frac{(2n+1-k)!}{2n(2n-1)\cdots(k+1)}\quad(2\leqslant k\leqslant n)$$

故

$$x_{2n}=2\left(\frac{2!}{2n}+\frac{3!}{2n(2n-1)}+\cdots+\frac{n!}{2n(2n-1)\cdots(n+2)}\right)+1$$

又因为 $2\leqslant k<n$ 时

$$\frac{k!}{2n(2n-1)\cdots(2n-k+2)}>\frac{(k+1)!}{2n(2n-1)\cdots(2n-k+1)}\Leftrightarrow 1>\frac{k+1}{2n-k+1}\Leftrightarrow k<n$$

所以

$$x_{2n}<2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+1=\frac{2(n-1)}{n}+1<3$$

又

$$x_{2n+1}=\frac{2!}{2n+1}+\frac{3!}{(2n+1)2n}+\cdots+\frac{n!}{(2n+1)2n\cdots(n+3)}+\frac{(n+1)!}{(2n+1)2n\cdots(n+2)}$$
$$+\frac{(n+2)!}{(2n+1)2n\cdots(n+1)}+\cdots+\frac{(2n)!}{(2n+1)2n\cdots 3}+1$$

由于

$$\frac{k!}{(2n+1)2n\cdots(2n-k+3)}=\frac{(2n-k+2)!}{(2n+1)2n\cdots(k+1)}\quad(2\leqslant k\leqslant n)$$

故

$$x_{2n+1}=2\left(\frac{2!}{2n+1}+\frac{3!}{(2n+1)2n}+\cdots+\frac{n!}{(2n+1)2n\cdots(n+3)}\right)$$
$$+\frac{(n+1)!}{(2n+1)2n\cdots(n+2)}+1$$

又因为 $2\leqslant k<n$ 时

$$\frac{k!}{(2n+1)2n\cdots(2n-k+3)} > \frac{(k+1)!}{(2n+1)2n\cdots(2n-k+2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{k+1}{2n-k+2} \Leftrightarrow 2k < 2n+1$$

所以

$$x_{2n+1} < 2\left(\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}+\cdots+\frac{2}{2n+1}\right)+\frac{2}{2n+1}+1 = \frac{4n-2}{2n+1}+1 < 3$$

于是 $\forall n \in \{2,3,\cdots\}$，有 $0 < x_n < 3$，故

$$0 < \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1} = \frac{1}{n}+\frac{x_n}{n} < \frac{1}{n}+\frac{3}{n} = \frac{4}{n}$$

应用夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)(nC_n^k)^{-1} = 0$$

例 1.21（江苏省 2008 年竞赛题）　设数列 $\{x_n\}$ 为 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ $(n = 1,2,\cdots)$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

解析　因为 $x_2 = \sqrt{6+x_1} = \sqrt{7} > 1 = x_1$，归纳假设 $0 < x_{n-1} < x_n \Rightarrow 0 < 6+x_{n-1} < 6+x_n \Rightarrow x_n = \sqrt{6+x_{n-1}} < \sqrt{6+x_n} = x_{n+1}$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调增. 又 $x_1 < 3$，归纳假设 $x_n < 3 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} < \sqrt{6+3} = 3$，所以数列 $\{x_n\}$ 有上界 3，应用单调有界准则得数列 $\{x_n\}$ 收敛.

令 $x_n \to A$，则 $x_{n+1} \to A \Rightarrow A = \sqrt{6+A} \Rightarrow A = 3$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

例 1.22（江苏省 2008 年竞赛题）　设数列 $\{x_n\}$ 为 $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3-\sqrt{3}}$，$x_{n+2} = \sqrt{3-\sqrt{3+x_n}}$ $(n = 1,2,\cdots)$，求证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极根.

解析　因为

$$|x_{n+2}-1| = \left|\sqrt{3-\sqrt{3+x_n}}-1\right| = \frac{\left|2-\sqrt{3+x_n}\right|}{\sqrt{3-\sqrt{3+x_n}}+1}$$

$$\leqslant \left|\sqrt{x_n+3}-2\right| = \frac{1}{\sqrt{x_n+3}+2}|x_n-1|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|x_n-1|$$

所以

$$|x_{2n}-1| \leqslant \frac{1}{2}|x_{2n-2}-1| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|x_2-1| = \frac{1}{2^{n-1}}\left|\sqrt{3-\sqrt{3}}-1\right|$$

$$|x_{2n+1}-1| \leqslant \frac{1}{2}|x_{2n-1}-1| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}|x_1-1| = \frac{1}{2^n}\left|\sqrt{3}-1\right|$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left|\sqrt{3-\sqrt{3}}-1\right|=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left|\sqrt{3}-1\right|=0$，应用夹逼准则得 $x_{2n}\to 1$，$x_{2n+1}\to 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 1.23（莫斯科动力学院 1975 年竞赛题） 设 $x_1=b$，$x_{n+1}=x_n^2+(1-2a)x_n+a^2(n\geqslant 1)$，当 a，b 满足何条件时数列 $\{x_n\}$ 收敛？并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析 因为$x_{n+1}=x_n+(x_n-a)^2$，于是$x_{n+1}\geqslant x_n$，即$\{x_n\}$单调增. 若$\{x_n\}$收敛，令 $x_n\to A \Rightarrow A=a$. 由

$$x_n^2+(1-2a)x_n+a^2\leqslant a \Rightarrow a-1\leqslant x_n\leqslant a$$

则 $a-1\leqslant b\leqslant a$.

反之，设 $a-1\leqslant b\leqslant a$，则

$$x_{n+1}\geqslant x_n\geqslant a-1,\quad x_{n+1}=x_n+(x_n-a)^2\leqslant x_n+a-x_n=a$$

故$\{x_n\}$单调增，有上界 a.

于是 $a-1\leqslant b\leqslant a$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1.24（莫斯科轻工业学院 1977 年竞赛题） 求正整数 n，使得

$$n<6(1-1.001^{-1000})<n+1$$

解析 由于数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增加且趋向于 e，所以$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$. 又$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2$. 取 $n=1000$，得

$$2<(1.001)^{1000}<\mathrm{e}<3$$

$$\frac{1}{3}<(1.001)^{-1000}<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}<1-1.001^{-1000}<\frac{2}{3}$$

$$3<6(1-1.001^{-1000})<4$$

于是所求正整数 $n=3$.

例 1.25（莫斯科公路学院 1976 年竞赛题） 设 $a>b>0$，定义数列 $a_1=\frac{a+b}{2}$，$b_1=\sqrt{ab}$，$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=\sqrt{a_1b_1}$，…，$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，…. 求证：这两个数列皆收敛，且其极限相等.

解析 由于

$$0 < b = \sqrt{b^2} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$$

所以 $0 < b < b_1 < a_1 < a$. 同理可得 $0 < b_1 < b_2 < a_2 < a_1$, $0 < b_2 < b_3 < a_3 < a_2$. 归纳假设 $0 < b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$,则

$$0 < b_n = \sqrt{b_n^2} < \sqrt{a_n b_n} < \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

所以 $0 < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$,由此得数列 $\{a_n\}$ 单调减,有下界 b;数列 $\{b_n\}$ 单调增,有上界 a. 应用单调有界准则,它们皆收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

在 $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ 两边令 $n \to \infty$,得

$$2A = A + B, \quad B^2 = AB$$

由于 $A > 0$, $B > 0$,所以 $A = B$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

例 1.26(莫斯科技术物理学院 1976 年竞赛题)　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,求证:数列 $\{c_n\}$ 收敛于 AB,其中 $c_n = \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}$.

解析　由题给条件得

$$a_n = A + \alpha_n, \quad b_n = B + \beta_n$$

这里 $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0 (n \to \infty)$. 于是

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n}[(A+\alpha_1)(B+\beta_n) + (A+\alpha_2)(B+\beta_{n-1}) + \cdots + (A+\alpha_n)(B+\beta_1)] \\ &= AB + \frac{B}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \frac{A}{n}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \\ &\quad + \frac{1}{n}(\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1) \end{aligned} \tag{*}$$

由于 $\alpha_n \to 0$,所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时 $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,且

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N + \alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_n)\right| \\ \leqslant{}& \frac{1}{n}|\alpha_1 + \cdots + \alpha_N| + \frac{1}{n}\left(|\alpha_{N+1}| + \cdots + |\alpha_n|\right) \\ \leqslant{}& \frac{1}{n}|\alpha_1 + \cdots + \alpha_N| + \frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2} \\ \leqslant{}& \frac{1}{n}|\alpha_1 + \cdots + \alpha_N| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

另一方面，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N|=0$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in\mathbf{N}$，当$n>M$时，$\dfrac{1}{n}|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，故$\forall\varepsilon>0$，取$K=\max\{N,M\}$，则当$n>K$时，有

$$\left|\frac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_K+\alpha_{K+1}+\cdots+\alpha_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由极限的定义得$\dfrac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\to 0(n\to\infty)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=0$$

同理可得$\beta_n\to 0$时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A}{n}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)=0$$

由于$\alpha_n\to 0$，所以$\exists k>0$，使得$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|\alpha_n|<k$，于是

$$\frac{1}{n}|\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1|\leqslant\frac{k}{n}|\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n|$$

由于$\beta_n\to 0$时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}|\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n|=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1)=0$$

综上，在(*)式中令$n\to\infty$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=AB$。

1.2.4　利用两个重要极限求极限(例1.27—1.30)

例1.27(莫斯科财政金融学院1977年竞赛题)　求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

解析　令$x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$，则$x_n\sin\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\sin x$，所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

例1.28(浙江省2010年竞赛题)　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\dfrac{1}{2}\right]^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

解析 因为

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{1}{2}=1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{0}{4}=0$$

应用关于e的重要极限，有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right]^{\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

例 1.29(南京大学1996年竞赛题) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=$ ______.

解析 记 $u(n)=\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0$，应用关于e的重要极限公式，有

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to\infty}(1+u(n))^{\frac{1}{u(n)}\cdot\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)\cdot\frac{1}{n}}}\\&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(a)}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}\right]=\exp\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right)\end{aligned}$$

例 1.30(全国大学生2013年决赛题) 计算

$$\lim_{x\to0^{+}}\left[\ln(x\ln a)\ln\left[\frac{\ln(ax)}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right]\quad(a>1)$$

解析 应用关于e的重要极限，得

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0^{+}}\left(\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln(x\ln a)}\right)\\&=\ln\left(\lim_{x\to0^{+}}\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot\frac{\ln x-\ln\ln a}{\ln x-\ln a}2\ln a}\right)\\&=\ln\left[\exp\left[\lim_{x\to0^{+}}\frac{1+\frac{1}{\ln x}\ln\ln a}{1-\frac{1}{\ln x}\ln a}2\ln a\right]\right]=2\ln a\end{aligned}$$

1.2.5 利用等价无穷小因子代换求极限(例 1.31—1.33)

例 1.31(莫斯科高等技术学校 1977 年竞赛题) 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1976}}{n^x\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x\right)}=\frac{1}{1977}$$

求 x.

解析 因 $n\to\infty$ 时 $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x\sim\frac{x}{n}$,所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1976}}{n^x\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1976}}{n^x\left(\frac{x}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1976}}{xn^{x-1}}$$

因右端极限存在,且极限不为零,所以 $x=1977$.

例 1.32(江苏省 1998 年竞赛题) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=$ ______.

解析 应用极限的四则运算法则,有

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-2^2}{\frac{1}{2}x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

例 1.33(北京市 1996 年竞赛题) 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin2x}\right)}{3^x-1}=5$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解析 由于 $x\to0$ 时,$\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin2x}\right)\to0$,所以$\frac{f(x)}{\sin2x}\to0$,且

$$\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin2x}\right)\sim\frac{f(x)}{\sin2x}\sim\frac{f(x)}{2x},\quad 3^x-1=e^{x\ln3}-1\sim x\ln3$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin2x}\right)}{3^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{2x}}{x\ln3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{2\ln3}=5$$

故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10\ln3$.

1.2.6 无穷小比较与无穷大比较(例 1.34—1.35)

例 1.34(西安交通大学 1989 年竞赛题) 当 $x\to0$ 时,确定下列无穷小量的阶

数：(1) $\tan(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$；(2) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$；(3) $3^{\sqrt{x}}-1$.

解析　(1) $x\to 0$ 时，有

$$\tan(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})=\tan\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{x}{2}}-1\right)\sim\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{x}{2}}-1\right)\sim\frac{\sqrt{2}}{4}x$$

故 $\tan(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$ 是 1 阶无穷小.

(2) $x\to 0$ 时，有 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1\sim\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$，故 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小.

(3) $x\to 0$ 时，有 $3^{\sqrt{x}}-1=e^{\sqrt{x}\ln 3}-1\sim\sqrt{x}\ln 3$，故 $3^{\sqrt{x}}-1$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小.

例 1.35（南京大学 1995 年竞赛题）　对充分大的一切 x，5 个函数 1000^x，e^{3x}，$\log_{10}x^{1000}$，$e^{\frac{1}{1000}x^2}$，$x^{10^{10}}$ 中最大的是______.

解析　因为 $x\to+\infty$ 时，指数函数比幂函数为高阶无穷大，幂函数比对数函数为高价无穷大，且本题的三个指数函数中，指数 $\frac{1}{1000}x^2$ 比 $x\ln 1000$，$3x$ 又是高阶无穷大，所以 5 个函数中 $e^{\frac{1}{1000}x^2}$ 是最高阶无穷大，因此最大.

1.2.7　连续性与间断点（例 1.36—1.41）

例 1.36（江苏省 1998 年竞赛题）　求 $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})|$.

解析　因为

$$\begin{aligned}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})|&=\left|\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+n}-n)\pi]\right|\\&=\left|\sin n\pi\cdot\cos(\sqrt{n^2+n}-n)\pi+\cos n\pi\cdot\sin(\sqrt{n^2+n}-n)\pi\right|\\&=\left|0+(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+n}-n)\pi\right|=\left|\sin(\sqrt{n^2+n}-n)\pi\right|\\&=\left|\sin\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\pi\right|=\sin\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})|=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

例 1.37（江苏省 2004 年竞赛题）　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 处连续，且对一切实数 x_1,x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

解析　在 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 中令 $x_1=x_2=0$，可得 $f(0)=0$. 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$$

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，令 $x-x_0=t$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)&=\lim_{t\to 0}f(x_0+t)=\lim_{t\to 0}(f(x_0)+f(t))\\&=f(x_0)+\lim_{t\to 0}f(t)=f(x_0)+0=f(x_0)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 的任意性，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

例 1.38（南京工业大学 2009 年竞赛题） 函数 $f(x)=\dfrac{x}{|1-x|}\ln|x|$ 的可去间断点为________.

解析 函数 $f(x)$ 有间断点 $x=0$ 与 $x=1$. 由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\ln|x|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 由于

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃型间断点.

例 1.39（精选题） 设 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有可去间断点 $x=1$，求 a 和 b 的值.

解析 因 $x=1$ 为可去间断点，所以 $a=1$ 或 $b=1$. 当 $b=1$ 时，由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-1}{(x-a)(x-1)}=\infty$$

不合题意. 当 $a=1$ 时，要 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{(x-1)(x-b)}$ 存在，必须 $b=e$. 当 $b=e$ 时，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{(x-1)(x-e)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-1)(x-e)}=\frac{e}{1-e}$$

符合题意，所以 $a=1,b=e$.

例 1.40（精选题） 设 $f(x)$ 对一切实数满足 $f(x^2)=f(x)$，且在 $x=0$ 与 $x=1$ 处连续，求证：$f(x)$ 恒为常数.

解析　$\forall x_0>0 \Rightarrow f(x_0)=f(\sqrt{x_0})=f(x_0^{\frac{1}{4}})=f(x_0^{\frac{1}{8}})=\cdots=f(x_0^{\frac{1}{2^n}})$，由于 $n\to\infty$ 时 $u=x_0^{\frac{1}{2^n}}\to 1$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_0^{\frac{1}{2^n}})=\lim_{u\to 1}f(u)=f(1)$$

$\forall x_1<0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_1^2)=f(|x_1|^2)=f(|x_1|)=f(|x_1|^{\frac{1}{2}})=\cdots = f(|x_1|^{\frac{1}{2^n}})$，于是

$$f(x_1)=\lim_{n\to\infty}f(|x_1|^{\frac{1}{2^n}})=\lim_{u\to 1}f(u)=f(1)$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0)=f(1)$。故 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=f(1)$.

例 1.41（北京市 1992 年竞赛题）　设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有定义，且函数 $e^x f(x)$ 与函数 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 上都是单调递增的，求证：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

解析　对 $\forall x_0\in(0,1)$，证明 $f(x)$ 在 x_0 的连续性，首先考虑右连续.

当 $0<x_0<x<1$ 时，由于 $e^{-f(x)}$ 单调递增，故 $e^{-f(x_0)}\leqslant e^{-f(x)}$，可知

$$f(x_0)\geqslant f(x)$$

又因为 $e^x f(x)$ 单调递增，故 $e^{x_0}f(x_0)\leqslant e^x f(x)$，得

$$e^{x_0-x}f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)$$

在上式中令 $x\to x_0^+$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 右连续. 同理可得其左连续性.

由此 $f(x)$ 在 x_0 是连续的，由 x_0 在 $(0,1)$ 内的任意性知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

1.2.8　利用介值定理的证明题（例 1.42—1.46）

例 1.42（浙江省 2011 年竞赛题）　证明：$[x^3]+x^2=[x^2]+x^3$ 存在一个非整数解，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

解析　令

$$f(x)=x^3-x^2+[x^2]-[x^3]$$

由于 $2<(\sqrt[3]{3})^2<(\sqrt[3]{3.9})^2<3, 3=(\sqrt[3]{3})^3<(\sqrt[3]{3.9})^3<4$，故当 $x\in[\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3.9}]$ 时，$[x^2]=2,[x^3]=3$，于是

$$f(x)=x^3-x^2+2-3=x^3-x^2-1$$

显见 $f(x)$ 在 $[\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3.9}]$ 上连续. 由于

$$f(\sqrt[3]{3})=2-\sqrt[3]{9}<0,\quad f(\sqrt[3]{3.9})=2.9-\sqrt[3]{15.21}>0$$

应用零点定理，必 $\exists\xi\in(\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3.9})$，使得 $f(\xi)=0$. 由于 $[\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{3.9}]\subset(1,2)$，故

$\xi\in(1,2)$,即 $f(x)=0$ 至少有一个非整数解,于是$[x^3]+x^2=[x^2]+x^3$ 至少存在一个非整数解.

例 1.43(北京市 1992 年竞赛题) 已知

$$f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$$

求证:(1) 对于任何自然数 n,方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$中仅有一根;

(2) 设 $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$满足 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

解析 (1) 已知 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n\in C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,且 $f_n(0)=1,f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,则由介值定理知,对于$\frac{1}{2}\in(0,1)$,存在 $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$. 又

$$f'_n(x)=-n(1-\cos x)^{n-1}\sin x<0,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

因此 $f_n(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格递减,故 x_n 是惟一存在的.

(2) 由 $f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$,得

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{e}>\frac{1}{2}$$

故存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2}=f_n(x_n)$$

由于 $f_n(x)$ 严格递减,所以 $\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}$. 令 $n\to\infty$,则 $\arccos\frac{1}{n}\to\frac{\pi}{2}$,应用夹逼准则可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

例 1.44(浙江省 2008 年竞赛题) (1) 证明 $f_n(x)=x^n+nx-2$(n 为正整数)在$(0,+\infty)$上有惟一正根 a_n;(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n$.

解析 (1) 由于 $f_n(0)=-2<0$,$f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{2}{n}\right)^n>0$,故在$\left[0,\frac{2}{n}\right]$上应用零点定理,$\exists a_n\in\left(0,\frac{2}{n}\right)\subset(0,+\infty)$,使 $f_n(a_n)=0$. 又 $f'_n(x)=nx^{n-1}+n>0$,$x\in(0,+\infty)$,即 $f_n(x)$ 在$(0,+\infty)$上严格单调增,故在$(0,+\infty)$上有惟一正根 a_n.

(2) 由 $n\in\mathbf{N}^*$ 得 $0\leqslant\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}<1$,$\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}<\frac{2}{n}$,故

$$f_n\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n-\frac{2}{n}<0$$

进一步得 $a_n\in\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2},\frac{2}{n}\right)$，因此

$$\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n<(1+a_n)^n<\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

令 $n\to\infty$，则

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}\to e^2$$

$$\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{2n-2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n-2}\cdot\frac{2n-2}{n}}\to e^2$$

应用夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n=e^2$.

例 1.45（北京市 1994 年竞赛题）　设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n=2,3,\cdots)$. 证明：(1) 方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内有惟一的实根 x_n；(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析　(1) 由题可知 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f_n(0)=0$，$f_n(1)=n>1$. 由介值定理知，$\exists x_n\in(0,1)$，使得 $f_n(x_n)=1$. 又 $f'_n(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$，$x\geqslant 0$，即 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增，故 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内有惟一的实根 x_n.

(2) 由(1)知，$\forall n\geqslant 2$，有 $0<x_n<1$，故数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 又 $f_n(x_n)=1=f_{n+1}(x_{n+1})$，即

$$x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1}$$

移项得

$$(x_n-x_{n+1})[1+(x_n+x_{n+1})+\cdots+(x_n^{n-1}+x_n^{n-2}x_{n+1}+\cdots+x_{n+1}^{n-1})]$$
$$=x_{n+1}^{n+1}>0$$

故 $x_n>x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 单调减少. 据单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

由 $0<x_n^n<x_2^n$，且 $0<x_2<1$，应用夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$. 又

$$x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$$

令 $x_n\to A(n\to\infty)$，则 $\frac{A}{1-A}=1$. 解得 $A=\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

例 1.46（精选题）　已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)$.

解析 令 $F(x)=f\left(x+\frac{b-a}{2}\right)-f(x),x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$,则

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)$$

由此可得

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)F(a)=-\left[f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^2\leqslant 0$$

(1) 当 $f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$时,$\xi=\frac{a+b}{2}$;

(2) 当 $f(a)\neq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$时,应用零点定理,$\exists\xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$,使得 $F(\xi)=0$,即

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)$$

练习题一

1. 已知函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内连续,且 $f(a+)$,$f(b-)$ 都存在,则 $f(x)$ 在(a,b)内(　　).

A. 有最大值　　B. 有最小值　　C. 有界　　D. 无界

2. 设 $z=x-y+f(x+y)$,当 $x=0$ 时,$z=y^3$,求 $f(x)$,$z(x,y)$.

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f\left(\frac{1}{3}x\right)=x$,求 $f(x)$.

4. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

5. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1+x^2+x^3}-ax-b)=0$,求 a 与 b 的值.

7. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x^2-9)\ln(4+x)}{\arctan^2(x+3)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x+\ln(1+x^3)}{\tan^3 x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x^2}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$;

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

8. 设 $x_1=1, x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}, n=1,2,\cdots$. 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

9. 设 $x_1=1, x_{n+1}+\sqrt{1-x_n}=0, n=1,2,\cdots$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

10. 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+x^n}\ (x>0)$.

11. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，试确定 a 和 b 的值.

12. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan(1+x^n)$ 的定义域、连续性；若有间断点，指出其类型.

13. 证明：方程 $x-2\sin x=0$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 内恰有一个实根.

14. 证明：方程 $\ln x=ax+b$ 至多有两个实根（其中 a,b 为常数，$a>0$）.

15. 证明：方程 $e^x=\dfrac{1}{2}ex^2$ 恰有一个实根.

16. 证明：方程 $2^x=1+x^2$ 恰有三个实根.

专题 2　一元函数微分学

2.1　基本概念与内容提要

2.1.1　导数的定义

$$f'(a) \xlongequal{\text{def}} \lim_{\square \to 0} \frac{f(a+\square)-f(a)}{\square} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(0) \xlongequal{\text{def}} \lim_{\square \to 0} \frac{f(\square)-f(0)}{\square} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

2.1.2　左、右导数的定义

$$f'_-(a) \xlongequal{\text{def}} \lim_{\square \to 0-} \frac{f(a+\square)-f(a)}{\square} = \lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_+(a) \xlongequal{\text{def}} \lim_{\square \to 0+} \frac{f(a+\square)-f(a)}{\square} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

左导数 $f'_-(a)$ 不同于导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的左极限 $f'(a-)$；右导数 $f'_+(a)$ 不同于导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的右极限 $f'(a+)$. 可以证明：当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的左(右)极限 $f'(a-)(f'(a+))$ 存在时，则左(右)导数 $f'_-(a)(f'_+(a))$ 必存在，且 $f'_-(a)=f'(a-)(f'_+(a)=f'(a+))$；当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续时，上述结论不成立.

2.1.3　微分概念

1) 可微的定义：若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的全增量可写为

$$\Delta f(x)\Big|_{x=a} = f(a+\Delta x)-f(a) = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (*)$$

时，称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处**可微**.

定理 1　当 f 在 $x=a$ 处可微时，f 在 $x=a$ 处必连续.

定理 2　函数 f 在 $x=a$ 处可微的充要条件是 f 在 $x=a$ 处可导，且(*)式中的 $A=f'(a)$.

2) 微分的定义：当函数 f 在 $x=a$ 处可微时，f 在 $x=a$ 处的**微分**定义为

$$\mathrm{d}f(x)\Big|_{x=a} \xlongequal{\text{def}} f'(a)\mathrm{d}x$$

一般的，有

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$$

2.1.4　基本初等函数的导数公式

$$(x^{\lambda})'=\lambda x^{\lambda-1},\quad (a^x)'=a^x\ln a,\quad (\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$$

$$(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a},\quad (\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,\quad (\tan x)'=\sec^2 x,\quad (\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x,\quad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad (\mathrm{arccot}\, x)'=\frac{-1}{1+x^2}$$

熟记两个函数的导数：$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

2.1.5　求导法则

1）四则运算法则：设函数 u、v 可导，则

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv',\quad (cu)'=cu'\quad (c\in\mathbf{R})$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$$

2）复合函数链锁法则

$$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

3）反函数、隐函数与参数式函数求导法则

4）取对数求导法则

$$f'(x)=f(x)(\ln|f(x)|)'$$

2.1.6　高阶导数

1）几个高阶导数公式

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}},\quad (\ln x)^{(n+1)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$(x^n)^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\ (1\leqslant k\leqslant n),\quad (x^n)^{(k)}=0\ (k>n)$$

2）参数式函数的二阶导数

3）分段函数在分段点处的二阶导数

4）莱布尼兹公式：设函数 u,v 皆 n 阶可导，则

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

2.1.7 微分中值定理

定理 1（费马定理） 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域 U 上定义，$f(a)$ 为 f 在 U 上的最大或最小值，且 f 在 $x=a$ 处可导，则 $f'(a)=0$.

定理 2（罗尔定理） 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

定理 3（拉格朗日中值定理） 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

定理 4（柯西中值定理） 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2.1.8 泰勒公式与马克劳林公式

1）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域 U 上 $(n+1)$ 阶可导，则 $\forall x\in U$，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+R_n(x)\tag{1}$$

称(1)式为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 n 阶**泰勒公式**，$R_n(x)$ 称为**余项**，有

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}\tag{2}$$

或

$$R_n(x)=o(x-a)^n\tag{3}$$

其中 ξ 介于 a 与 x 之间，并称(2)式为**拉格朗日余项**，称(3)式为**皮亚诺余项**.

2）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 U 上 $(n+1)$ 阶可导，则 $\forall x\in U$，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n) \tag{4}$$

称(4)式为 $f(x)$ 的**马克劳林公式**.

3) 几个常用函数的马克劳林公式:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots-\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

2.1.9　洛必达法则

在某极限过程中(下面以 $x\to a$ 为例), $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, 则称 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型的**未定式极限**. 类似的, 有 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, $0\cdot\infty$ 型, $\infty-\infty$ 型, 以及 1^∞, 0^0, ∞^0 型的未定式的极限. 洛必达法则是求上述未定式的极限的好方法.

1) $\frac{0}{0}$ 型的未定式的极限

定理 1(洛必达法则 Ⅰ)　若在某极限过程中(下文以 $x\to a$ 为例), 有

(1) $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$;

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=a$ 的某去心邻域内可导, $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞),

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{或 }\infty)$$

2) $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式的极限

定理 2(洛必达法则 Ⅱ)　若在某极限过程中(下文以 $x\to a$ 为例), 有

(1) $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$;

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=a$ 的某去心邻域内可导, $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞),

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{或}\infty)$$

3）其他型的未定式的极限

对于 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$ 型的未定式，总可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的形式；对 1^{∞}，0^{0}，∞^{0} 型的未定式 u^{v}，有

$$u^{v}=\exp(v\ln u)=\exp\left(\frac{\ln u}{1/v}\right)$$

这里 $\frac{\ln u}{1/v}$ 是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

2.1.10　导数在几何上的应用

1）单调性

可导函数 $f(x)$ 在区间 Z 上单调增（减）的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$. 若 $f'(x)>0$，$x\in Z$，则 $f(x)$ 在 Z 上严格增；若 $f'(x)<0$，$x\in Z$，则 $f(x)$ 在 Z 上严格减.

2）极值

可导函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 取极值的必要条件是 $f'(a)=0$. 反之，若 $f'(a)=0$，且

$$f'(x)(x-a)>0\quad(<0)$$

这里 x 在 $x=a$ 的去心邻域内取值，则 $f(a)$ 为 $f(x)$ 在一个极小值（极大值）. 若 $f'(a)=0$，$f''(a)>0(<0)$，则 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极小值（极大值）.

3）最值

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，$x_i\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的驻点（即 $f'(x_i)=0$），$x_j\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的不可导点，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值与最小值分别为

$$\max_{x\in[a,b]}f(x)=\max\{f(x_i),f(x_j),f(a),f(b)\}$$

$$\min_{x\in[a,b]}f(x)=\min\{f(x_i),f(x_j),f(a),f(b)\}$$

4）凹凸性、拐点

设 $f(x)$ 在区间 Z 上二阶可导，当 $f''(x)>0$ 时，$f(x)$ 在 Z 上的曲线是凹的；当 $f''(x)<0$ 时，$f(x)$ 在 Z 上的曲线是凸的. 二阶可导函数 $f(x)$ 有拐点$(a,f(a))$的必要条件是 $f''(a)=0$. 反之，若 $f''(a)=0$，且

$$f''(x)(x-a)\neq 0$$

这里 x 在 $x=a$ 的去心邻域内取值，则$(a,f(a))$是 $f(x)$ 的拐点.

5）作函数的图形

首先考察函数 $f(x)$ 的定义域，是否有奇偶性、周期性，是否连续；第二步求 $f'(x)$，确定驻点与不可导点，判别 $f(x)$ 的单调性，求其极值；第三步求 $f''(x)$，确定

凹凸区间,求出拐点;第四步考察 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的曲线的走向,即求 $y=f(x)$ 的渐近线;最后作 $y=f(x)$ 的简图.

6) 渐近线

(1) 铅直渐近线:若 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=\infty$,则 $x=a$ 是 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线.

(2) 水平渐近线:若 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=B(A,B \in \mathbf{R})$,则 $y=A$ 与 $y=B$ 是 $y=f(x)$ 的两条水平渐近线. $y=f(x)$ 的水平渐近线最多有两条.

(3) 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$, $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-ax)=b$,则 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线;若 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}=c$, $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x)-cx)=d$,则 $y=cx+d$ 是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

$y=f(x)$ 的斜近线最多有两条;$y=f(x)$ 的水平渐近线与斜渐近线的总条线最多有两条.

2.2　竞赛题与精选题解析

2.2.1　利用导数的定义解题(例 2.1—2.8)

例 2.1(北京市 1994 年竞赛题)　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,对任意 x 都有 $f(x+1)=2f(x)$,且当 $0 \leqslant x<1$ 时 $f(x)=x(1-x^2)$,试判断在 $x=0$ 处函数 $f(x)$ 是否可导.

解析　当 $-1 \leqslant x<0$ 时有 $0 \leqslant x+1<1$,故

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)(-2x-x^2)$$

$$f'_-(0)=\lim_{x \to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \to 0^-}\frac{-\frac{x}{2}(x+1)(2+x)-0}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x \to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \to 0^+}\frac{x(1-x^2)-0}{x}=1$$

由于 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 2.2(江苏省 2000 年竞赛题)　设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,欲使 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导,则必有　(　　)

A. $f'(0)=0$　　B. $f(0)=0$

C. $f(0)+f'(0)=0$　　D. $f(0)-f'(0)=0$

解析　由导数的定义,有

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f(x)\mid\sin x\mid-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}f(0)\frac{\mid\sin x\mid}{x}$$
$$=f'(0)+f(0)\lim_{x\to0}\frac{\mid\sin x\mid}{x}$$

因为$\lim\limits_{x\to0+}\frac{\mid\sin x\mid}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0-}\frac{\mid\sin x\mid}{x}=-1$，所以要使上式右端极限存在，必须 $f(0)=0$. 故选 B.

例 2.3(江苏省 1996 年竞赛题)　设当 $x=0$ 时 $\frac{d}{dx}f(\sin x)=\frac{d}{dx}f^2(\sin x)$，$f'(0)\neq0$，则 $f(0)=$ ______.

解析　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 应用导数的定义得

$$\frac{d}{dx}f(\sin x)\bigg|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=f'(0)$$

$$\frac{d}{dx}f^2(\sin x)\bigg|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{f^2(\sin x)-f^2(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{x}\cdot(f(\sin x)+f(0))$$
$$=2f(0)\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=2f(0)\cdot f'(0)$$

由题意得 $f'(0)=2f(0)\cdot f'(0)$，因为 $f'(0)\neq0$，所以 $f(0)=\frac{1}{2}$.

例 2.4(北京市 1991 年竞赛题)　设 f 是可导函数，对于任意实数 s，t 有

$$f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$$

且 $f'(0)=1$，求函数 f 的表达式.

解析　令 $s=0$，得

$$f(0+t)-f(0)=f(t)\Rightarrow f(0)=0$$

故

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=f'(0)=1$$

$$f'(s)=\lim_{t\to0}\frac{f(s+t)-f(s)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}+2s=1+2s$$

积分得 $f(s)=s^2+s+c$，由 $f(0)=0$ 得 $c=0$. 于是 $f(s)=s^2+s$.

例 2.5(精选题)　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$，求 $f(x)$，并讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

解析　根据题意，有 $f(1)=\frac{1}{2}(1+a+b)$，且当 $x>1$ 时 $f(x)=x^2$，当 $x<1$ 时 $f(x)=ax+b$。则当 $x\neq 1$ 时，$f(1-)=a+b$，$f(1+)=1$。故当 $a+b=\frac{1}{2}(1+a+b)=1$，即 $a+b=1$ 时 f 在 $x=1$ 时连续，且 $f(1)=1$。

又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{a}{1}=a$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

于是仅当 $a=2,b=-1$ 时，f 在 $x=1$ 处可导。

例 2.6（江苏省 2006 年竞赛题）　设

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b\sin x+c, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$$

试问 a,b,c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续，但二阶导数不存在？

解析　因 $f(0-)=c$，$f(0+)=0$，$f(0)=c$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $c=0$。由

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{ax^2+b\sin x-0}{x}=b$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=1$$

所以 $b=1$，且

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+\cos x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}$$

因 $f'(0-)=1$，$f'(0+)=1$，$f'(0)=1$，故 $b=1$，$c=0$ 时 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

又

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2ax+\cos x-1}{x}=2a,\\ \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-x}{x(1+x)}=-1\end{cases}$$

则当 $2a \neq -1$，即 $a \neq -\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶不可导.

综上，$a \neq -\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=0$ 为所求之值.

例 2.7（江苏省 1994 年竞赛题）　已知 $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right]$$

解析　因 $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)-f(0)}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}k\cdot\frac{f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)-f(0)}{\dfrac{k}{n^2}}=kf'(0)$$

这里 $k=1,2,\cdots,n$. 于是 $n\to\infty$ 时

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=kf'(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left[f'(0)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)+n\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[f'(0)\cdot\frac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}f'(0)\end{aligned}$$

例 2.8（江苏省 2016 年竞赛题）　设命题：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=a\quad(a\in\mathbf{R})$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=a$.

判断该命题是否成立. 若成立，给出证明；若不成立，举一反例并作出说明.

解析　**方法 1**　命题成立. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a$，所以

$$f(2x)=f(x)+ax+o(x)\quad(x\to 0)$$

此式等价于

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}ax+o\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}o(x)\\&=f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}(ax+o(x))\quad(x\to 0)\end{aligned}$$

由此可得

$$f(x)=\left(f\left(\frac{x}{2^2}\right)+\frac{1}{2^2}(ax+o(x))\right)+\frac{1}{2}(ax+o(x))$$
$$=f\left(\frac{x}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)(ax+o(x))$$
$$=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)(ax+o(x))\quad(x\to 0)$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$，且$f(x)$在$x=0$处连续，则在上式中令$n\to\infty$，可得

$$f(x)=f(0)+ax+o(x)\quad(x\to 0)$$

应用可微的定义得$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=a$.

方法2　命题成立. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=a$，所以

$$f(2x)-f(x)=ax+x\alpha(x)\quad(x\to 0\text{ 时 }\alpha(x)\to 0)$$

由此可得

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=a\,\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\alpha\left(\frac{x}{2}\right)\quad\left(x\to 0\text{ 时 }\alpha\left(\frac{x}{2}\right)\to 0\right)$$
$$\vdots$$
$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=a\,\frac{x}{2^n}+\frac{x}{2^n}\alpha\left(\frac{x}{2^n}\right)\quad\left(x\to 0\text{ 时 }\alpha\left(\frac{x}{2^n}\right)\to 0\right)$$

将上述n个式子相加，得

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)ax+A(x)$$

其中$A(x)=x\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\alpha\left(\frac{x}{2^k}\right)$. 记$\beta(x)=\max\left\{\left|\alpha\left(\frac{x}{2}\right)\right|,\left|\alpha\left(\frac{x}{2^2}\right)\right|,\cdots,\left|\alpha\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\right\}$，则$x\to 0$时$\beta(x)\to 0$，又因为$0<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1$，所以$|A(x)|\leqslant|x|\beta(x)$. 因此$A(x)=o(x)$，于是有

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)ax+o(x)\quad(x\to 0)$$

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$，且$f(x)$在$x=0$处连续，在上式中令$n\to\infty$，可得

$$f(x)-f(0)=ax+o(x)\quad(x\to 0)$$

应用微分的定义得$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=a$.

2.2.2 利用求导法则解题(例 2.9—2.11)

例 2.9(浙江省 2003 年竞赛题) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2$.

解析 应用二项式定理,有

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k$$

两边求导得

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot kx^{k-1}$$

两边乘以 x 后再求导得

$$n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2x^{k-1}$$

令 $x=1$ 得

$$n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2$$

化简得$\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2=\dfrac{1}{4}2^n\cdot n(n+1)$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2=\frac{1}{4}$$

例 2.10(江苏省 1998 年竞赛题) 函数 $f(x)=(x^2+3x+2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为________.

解析 令 $u(x)=x^2+3x+2, v(x)=|x^3-x|$,则 $u(x)$ 处处可导,而 $v(x)$ 在 $x=-1,0,1$ 处不可导.在其他点处处可导. $u(-1)=0, u(0)=2, u(1)=6$. $v'_-(-1)=-2, v'_+(-1)=2$; $v'_-(0)=-1, v'_+(0)=1$; $v'_-(1)=-2, v'_+(1)=2$. 因 $f(x)=u(x)v(x)$,又因为 $u'_\pm(x)=u'(x)$,则

$$f'_-(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'_-(x),\quad f'_+(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'_+(x)$$

令 $x=-1,0,1$ 分别代入上式得

$$f'_-(-1)=u'(-1)v(-1)+u(-1)v'_-(-1)=0+0\cdot(-2)=0$$
$$f'_+(-1)=u'(-1)v(-1)+u(-1)v'_+(-1)=0+0\cdot 2=0$$
$$f'_-(0)=u'(0)v(0)+u(0)v'_-(0)=0+2\cdot(-1)=-2$$
$$f'_+(0)=u'(0)v(0)+u(0)v'_+(0)=0+2\cdot 1=2$$
$$f'_-(1)=u'(1)v(1)+u(1)v'_-(1)=0+6\cdot(-2)=-12$$

$$f'_+(1)=u'(1)v(1)+u(1)v'_+(1)=0+6\cdot 2=12$$

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导，$f'(-1)=0$. $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处左、右导数不相等，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处不可导，其他点处处可导. 于是 $f(x)$ 有2个不可导点.

例 2.11(南京大学1996年竞赛题)　证明：两条心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 与 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 在交点处的切线互相垂直.

解析　曲线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 化为参数方程为

$$x=a(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=a(1+\cos\theta)\sin\theta$$

其斜率为

$$k_1=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta}$$

曲线 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 化为参数方程为

$$x=a(1-\cos\theta)\cos\theta,\quad y=a(1-\cos\theta)\sin\theta$$

其斜率为

$$k_2=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+\sin 2\theta}$$

再求两曲线的交点. 由 $\begin{cases}\rho=a(1+\cos\theta),\\ \rho=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ 解得 $\cos\theta=0$，于是交点的极坐标为 $\left(\frac{\pi}{2},a\right)$ 与 $\left(\frac{3}{2}\pi,a\right)$.

在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处，$k_1=\frac{0-1}{-1-0}=1$，$k_2=\frac{0+1}{-1+0}=-1$，因为 $k_1k_2=-1$，所以两曲线在交点 $\left(\frac{\pi}{2},a\right)$ 处的切线互相垂直.

在 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 处，$k_1=\frac{0-1}{-1-0}=1$，$k_2=\frac{0+1}{-1+0}=-1$，因为 $k_1k_2=-1$，所以两曲线在交点 $\left(\frac{3}{2}\pi,a\right)$ 处的切线互相垂直.

2.2.3　求高阶导数(例 2.12—2.23)

例 2.12(江苏省2016年竞赛题)　设函数

$$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

试求 $f''(2)$.

解析　令 $g(x)=(x-1)(x-3)^3(x-4)^4$，则 $f(x)=(x-2)^2g(x)$，应用莱

布尼茨公式可得

$$f''(x)=2g(x)+4(x-2)g'(x)+(x-2)^2g''(x)$$

于是

$$f''(2)=2g(2)=2(-1)^3(-2)^4=-32$$

例 2.13(南京大学 1995 年竞赛题)　设 $f'(0)=1,\ f''(0)=0$,求证:在 $x=0$ 处,有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)$$

解析　因为 $f''(0)=0$,所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处可导,因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 令 $F(x)=f(x^2)$,则

$$F'(x)=2xf'(x^2),\quad F'(0)=0$$

应用二阶导数的定义得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x^2)\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F'(x)\right|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2xf'(x^2)}{x}=2f'(0)=2$$

又令 $G(x)=f^2(x)$,则

$$G'(x)=2f(x)f'(x),\quad G'(0)=2f(0)f'(0)=2f(0)$$

应用二阶导数的定义得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G'(x)\right|_{x=0}=\lim_{x\to0}\frac{G'(x)-G'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)f'(x)-2f(0)}{x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)f'(x)-f(x)+f(x)-f(0)}{x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)(f'(x)-f'(0))}{x}+2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=2f(0)f''(0)+2f'(0)=0+2=2$$

综上,原式得证.

例 2.14(江苏省 1994 年竞赛题)　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f''(0)=$ ____.

解析　由导数的定义,有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{2x}=0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，再用定义求 $f''(0)$ 得

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

例 2.15（全国大学生 2009 年预赛题）　设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________

解析　显见 $x>0$，原式两边取对数得

$$\ln x+f(y)=y+\ln\ln 29$$

两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{x}+f'(y)y'=y' \tag{*}$$

由（*）式可得 $y'=\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$.（*）式两边对 x 再求导数得

$$-\frac{1}{x^2}+f''(y)(y')^2+f'(y)y''=y''$$

由此式解出 y''，并利用 y' 的表达式可得

$$y''=\frac{-\dfrac{1}{x^2}+f''(y)(y')^2}{1-f'(y)}=\frac{-\dfrac{1}{x^2}+f''(y)\dfrac{1}{x^2[1-f'(y)]^2}}{1-f'(y)}$$
$$=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$$

例 2.16（江苏省 2000 年竞赛题）　若 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x+t(1-t)=0,\\ te^y+y+1=0\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解析　由 $x=t^2-t$，$x'(t)=2t-1$，$x''(t)=2$，所以 $x'(0)=-1$，$x''(0)=2$. 设由 $te^y+y+1=0$ 确定 $y=y(t)$，则 $y(0)=-1$. 方程两边对 t 求导得

$$e^y+te^y\cdot y'(t)+y'(t)=0 \tag{*}$$

令 $t=0$ 得 $e^{-1}+0+y'(0)=0$，所以 $y'(0)=-\dfrac{1}{e}$.

（*）式两边求 t 求导数得

$$2e^yy'(t)+te^y(y'(t))^2+te^yy''(t)+y''(t)=0$$

令 $t=0$ 得 $2e^{-1}y'(0)+0+0+y''(0)=0$，所以 $y''(0)=\frac{2}{e^2}$.

于是

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{x'(0)y''(0)-y'(0)x''(0)}{(x'(0))^3}=\frac{-\frac{2}{e^2}+\frac{2}{e}}{-1}=\frac{2}{e^2}-\frac{2}{e}$$

例 2.17（江苏省 1991 年竞赛题） 设 $P(x)=\frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$，其中 m,n 为正整数，则 $P(1)=$ ______.

解析 因为

$$(1-x^m)^n=(1-x)^n\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n$$

令 $u(x)=(1-x)^n$，$v(x)=(1+x+\cdots+x^{m-1})^n$，应用莱布尼兹公式，因 $u(1)=u'(1)=\cdots=u^{(n-1)}(1)=0$，$u^{(n)}(1)=(-1)^n n!$，所以

$$\begin{aligned}P(1)&=v^{(n)}(1)u(1)+nv^{(n-1)}(1)u'(1)+\cdots+v(1)u^{(n)}(1)\\&=0+0+\cdots+0+m^n(-1)^n n!=(-1)^n m^n\cdot n!\end{aligned}$$

例 2.18（江苏省 1994 年竞赛题） 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，求 $f^{(n)}(2)$.

解析 由 $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，令 $u(x)=(x-2)^n$，$v(x)=(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，由于 $u(2)=u'(2)=\cdots=u^{(n-1)}(2)=0$，$u^{(n)}(2)=n!$，应用莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(2)&=v(2)u^{(n)}(2)+nv'(2)u^{(n-1)}(2)+\cdots+v^{(n)}(2)u(2)\\&=v(2)u^{(n)}(2)=n!\cos\frac{4\pi}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}n!\end{aligned}$$

例 2.19（广东省 1991 年竞赛题） 设 $f(x)=\frac{x^n}{x^2-1}(n=1,2,3,\cdots)$，求 $f^{(n)}(x)$.

解析 应用多项式除法，有

$$f(x)=\begin{cases}x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+x^2+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right), & n\text{ 为偶数},\\ x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right), & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

由于 $(x^k)^{(n)}=0(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$，$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$，所以

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right],\quad n=1,2,3,\cdots$$

例 2.20(江苏省 2012 年竞赛题)　设 $y=\ln(1-x^2)$，求 $y^{(n)}$.

解析　由于

$$y=\ln(1-x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-x),\quad y'=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

故

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n-1)}+\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x+1)^n}+\frac{1}{(x-1)^n}\right)$$

例 2.21(浙江省 2004 年竞赛题)　设 $f(x)=\arctan\frac{1-x}{1+x}$，求 $f^{(n)}(0)$.

解析　已知

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

即 $(1+x^2)f'(x)=-1$. 等式两边对 x 求 $(n-1)$ 阶导数，应用莱布尼兹公式，得

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+C_{n-1}^1\cdot 2xf^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^2\cdot 2f^{(n-2)}(x)=0$$

令 $x=0$，得

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$$

而 $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$，$f''(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，故 $f'(0)=-1$，$f''(0)=0$. 所以当 n 为偶数时，$f^{(n)}(0)=0$；当 n 为奇数时，$f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1f'(0)=(-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)!$. 即

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数；}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)!, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

例 2.22(精选题)　设 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解析　由

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\\&\Rightarrow(1-x^2)y'-xy-1=0\Rightarrow(1-x^2)y''-3xy'-y=0\\&\Rightarrow(1-x^2)y'''-5xy''-4y'=0\Rightarrow\cdots\\&\Rightarrow(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0\end{aligned}$$

令 $x=0$，得 $y^{(n+1)}(0)=n^2y^{(n-1)}(0)$. 由于 $y'(0)=1$，$y''(0)=y(0)=0$，所以

$$y^{(2n)}(0)=0,\quad y^{(2n+1)}(0)=4^n(n!)^2$$

例 2.23(南京大学 1996 年竞赛题)　设 $y = x^{n-1}\ln x$，求 $y^{(n)}$.

解析　由

$$y' = (n-1)x^{n-2}\left(\ln x + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\begin{aligned} y'' &= (n-1)(n-2)x^{n-3}\left(\ln x + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-3)!}x^{n-3}\left(\ln x + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right) \end{aligned}$$

归纳假设

$$y^{(k)} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}\left(\ln x + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{n-k}\right) \qquad (*)_k$$

则

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \frac{(n-1)!}{(n-k-2)!}x^{n-k-2}\left(\ln x + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{n-k}\right) \\ &\quad + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}\frac{1}{x} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-2)!}x^{n-k-2}\left(\ln x + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{n-k} + \frac{1}{n-k-1}\right) \end{aligned}$$

所以$(*)_{k+1}$成立，于是$(*)_k$对 $\forall k = 1, 2, \cdots, n-1$ 成立. 当 $k = n-1$ 时

$$y^{(n-1)} = (n-1)!x^0\left(\ln x + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right)$$

于是

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$$

2.2.4　与微分中值定理有关的证明题(例 2.24—2.44)

例 2.24(莫斯科大学 1975 年竞赛题)　设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续可导，$f(0) = 1$，且对一切 $x \geqslant 0$ 有 $|f(x)| \leqslant e^{-x}$，求证：$\exists \xi \in (0,+\infty)$，使得 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$.

解析　令 $F(x) = f(x) - e^{-x}$，则 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续可导，且 $F(0) = f(0) - 1 = 0$. 由于 $|f(x)| \leqslant e^{-x}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)| \leqslant \lim_{x\to+\infty}e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}f(x) = 0$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}F(x) = \lim_{x\to+\infty}f(x) - \lim_{x\to+\infty}e^{-x} = 0$$

若 $f(x) = e^{-x}$，则 $\forall x \in [0,+\infty)$，$F(x) = 0$，于是 $\forall \xi \in (0,+\infty)$，有 $f'(\xi) =$

$-e^{-\xi}$. 若 $f(x) \neq e^{-x}$，由于 $|f(x)| \leq e^{-x}$，所以 $\exists c \in (0, +\infty)$，使得 $f(c) < e^{-c}$，则 $F(c) < 0$. 于是 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内取得最小值. 若 $F(\xi)$ 是其最小值，则 $F'(\xi) = 0$. 即 $\exists \xi \in (0, +\infty)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$.

例 2.25（精选题）　已知函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，在 $(a, +\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$，求证：$\exists \xi \in (a, +\infty)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

解析　若 $\forall x \geq a$ 有 $f(x) = f(a)$，则 $\forall \xi > a$，有 $f'(\xi) = 0$. 若 $f(x) \not\equiv f(a)$，则 $\exists b > a$，使得 $f(b) \neq f(a)$. 不妨设 $f(b) > f(a)$. 记 $f(b) - f(a) = 2\varepsilon$，$\varepsilon > 0$，在区间 $[a, b]$ 上应用介值定理，$\exists c_1 \in (a, b)$，使得 $f(c_1) = f(a) + \varepsilon$. 由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$，应用极限的性质，$\exists N \in (b, +\infty)$，使得

$$f(a) - \varepsilon < f(N) < f(a) + \varepsilon$$

在 $[b, N]$ 上再次应用介值定理，$\exists c_2 \in (b, N)$，使得 $f(c_2) = f(a) + \varepsilon$. 最后在区间 $[c_1, c_2]$ 上应用罗尔定理，$\exists \xi \in (c_1, c_2) \subset (a, +\infty)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

例 2.26（江苏省 2000 年竞赛题）　设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且对于 (a, b) 内的一切 x 均有 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$. 证明：如果 $f(x)$ 在 (a, b) 内有两个零点，则介于这两个零点之间，$g(x)$ 至少有一个零点.

解析　（用反证法）假设 $\forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$，$g(x) \neq 0$，这里 $f(x_1) = f(x_2) = 0$. 令 $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$，由于 $f'(x_1)g(x_1) - f(x_1)g'(x_1) = f'(x_1)g(x_1) \neq 0$，$f'(x_2)g(x_2) - f(x_2)g'(x_2) = f'(x_2)g(x_2) \neq 0$，所以 $g(x_1) \neq 0$，$g(x_2) \neq 0$. 于是 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上可导，且 $F(x_1) = F(x_2) = 0$，应用罗尔定理，必 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$，使得 $F'(\xi) = 0$. 由于

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

所以 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$，此与条件 $\forall x \in (a, b)$，$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ 矛盾. 故 $g(x)$ 在 (x_1, x_2) 内至少有一个零点.

例 2.27（莫斯科石油与天然气工业学院 1976 年竞赛题）　设实系数一元 n 次方程

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0, n \geq 2)$$

的根全为实数，证明：方程 $P'(x) = 0$ 的根也全为实数.

解析　设方程 $P(x) = 0$ 的 n 个实根为

$$c_1, c_2, \cdots, c_r, d_1, d_2, \cdots, d_l$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ 为单根；$d_1, d_2, \cdots, d_l$ 为重根，其重数依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ $(k_j \geq 2, j = 1, 2, \cdots, l)$，则

$$r + k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$$

对于重根 $d_j(j=1,2,\cdots,l)$，多项式 $P(x)$ 可写为

$$P(x)=(x-d_j)^{k_j}Q(x),\quad Q(d_j)\neq 0$$

则

$$\begin{aligned}P'(x)&=k_j(x-d_j)^{k_j-1}Q(x)+(x-d_j)^{k_j}Q'(x)\\&=(x-d_j)^{k_j-1}[k_jQ(x)+(x-d_j)Q'(x)]\end{aligned}$$

由于 $k_jQ(x)+(x-d_j)Q'(x)\Big|_{x=d_j}=k_jQ(d_j)\neq 0$，所以 $x=d_j$ 是方程 $P'(x)=0$ 的 (k_j-1) 重实根. 由此可得方程 $P'(x)=0$ 有实根 $d_1,d_2,\cdots,d_l$，它们的重数依次为 $k_1-1,k_2-1,\cdots,k_l-1$，这些实根的总个数为

$$(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_l-1)=n-r-l$$

另一方面，在 $P(x)=0$ 的每两个相邻实根之间应用罗尔定理，可得方程 $P'(x)=0$ 至少有一个实根. 由此可得 $P'(x)=0$ 至少有 $(r+l-1)$ 个实根.

由上述两种情况获得的方程 $P'(x)=0$ 的实限，至少有 $(n-r-l)+(r+l-1)=(n-1)$ 个. 而 $P'(x)=0$ 为实系数一元 $(n-1)$ 次方程，它至多有 $(n-1)$ 个实根. 因此方程 $P'(x)=0$ 恰有 $(n-1)$ 个实根，即 $P'(x)=0$ 的根全为实数.

例 2.28（江苏省 2000 年竞赛题） 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $g'(x)\neq 0$. 证明：存在一点 $c(a<c<b)$，使得

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

解析 取辅助函数

$$F(x)=f(a)g(x)+g(b)f(x)-f(x)g(x)$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $F(a)=F(b)=f(a)g(b)$，应用罗尔定理，$\exists c\in(a,b)$，使得 $F'(c)=0$. 由于

$$F'(x)=f(a)g'(x)+g(b)f'(x)-[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]$$

则

$$F'(c)=f(a)g'(c)+g(b)f'(c)-[f'(c)g(c)+f(c)g'(c)]=0$$

化简得

$$g'(c)(f(a)-f(c))=f'(c)(g(c)-g(b))$$

由于 $g'(c)\neq 0$，且 $g(c)-g(b)\neq 0$（否则 $\exists\xi\in(c,b)$，使得 $g'(\xi)=0$，此与 $g'(x)\neq 0$ 矛盾），所以上式等价于

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

例 2.29(全国大学生 2013 年决赛题)　设函数 $f(x)$ 在区间$[-2,2]$上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，又 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$. 试证：在$(-2,2)$上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

解析　因为函数 $f(x)$ 在区间$[-2,2]$上二阶可导，所以 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间$[-2,2]$上皆连续. 记 $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$，则 $F(0)=4$.

分别在区间$[-2,0]$与$[0,2]$上应用拉格朗日中值定理，则存在 $\xi_1\in(-2,0)$，$\xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

由于 $|f(x)|\leqslant 1$，故 $|f'(\xi_1)|\leqslant 1$，$|f'(\xi_2)|\leqslant 1$，得 $0\leqslant F(\xi_1)\leqslant 2$，$0\leqslant F(\xi_2)\leqslant 2$.

因为 $F(x)$ 在闭区间$[\xi_1,\xi_2]$上连续，所以 $F(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上取到最大值，设最大值为 $F(\xi)=M$，因 $F(0)=4$，所以 $M\geqslant 4$. 又因 $0\leqslant F(\xi_1)\leqslant 2$，$0\leqslant F(\xi_2)\leqslant 2$，所以 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$. 因此 $F(\xi)$ 是 $F(x)$ 在(ξ_1,ξ_2)内的极大值，故有 $F'(\xi)=0$，即

$$F'(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)+2f'(\xi)f''(\xi)=2f'(\xi)(f(\xi)+f''(\xi))=0$$

因为 $F(\xi)=[f(\xi)]^2+[f'(\xi)]^2\geqslant 4$，$[f(\xi)]^2\leqslant 1$，所以 $f'(\xi)\neq 0$，于是有

$$f(\xi)+f''(\xi)=0$$

其中 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-2,2)$.

例 2.30(北京市 1992 年竞赛题)　设 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，且

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$$

求证：$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$.

解析　当 $x\in(0,\pi)$ 时，有 $\sin x>0$. 如果 $\forall x\in(0,\pi)$，有 $f(x)>0(<0)$，则 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x>0(<0)$. 而已知 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$，故在$(0,\pi)$内 $f(x)$ 不可能恒正或恒负，即 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内必有零点.

假设 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内有惟一零点 x_0，则在$(0,x_0)$及(x_0,π)上 $f(x)$ 异号. 不妨设 $0<x<x_0$ 时 $f(x)>0$，$x_0<x<\pi$ 时 $f(x)<0$，则

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x=\int_0^{x_0}f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{\pi}f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x<0$$

但由已知条件有

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin(x-x_0)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\cos x_0\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}f(x)\cos x\sin x_0\mathrm{d}x=0$$

导出矛盾，故 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内至少存在两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$. 在区间$[x_1,x_2]$上应用罗尔定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,\pi)$，使 $f'(\xi)=0$.

例 2.31(江苏省 2004 年竞赛题)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且有

$f(a)=a$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，求证：在$(a,b)$内至少有一点$\xi$，使得

$$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

解析 由

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2) \Rightarrow \int_a^b (f(x)-x)\mathrm{d}x=0$$

对上面的右式应用积分中值定理，$\exists c\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b (f(x)-x)\mathrm{d}x=(f(c)-c)(b-a)=0$$

于是 $f(c)-c=0\ (a<c<b)$. 取辅助函数

$$F(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)-x)$$

则 $F(a)=F(c)=0$，且 $F(x)$ 在$[a,c]$上连续，在(a,c)内可导，应用罗尔定理，$\exists\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$. 因

$$F'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-1-f(x)+x)$$

所以 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}(f'(\xi)-1-f(\xi)+\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

例 2.32（江苏省 2016 年竞赛题） 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f''(\xi)+(1-\xi)f'(\xi)=1+\xi$.

解析 因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，应用拉格朗日中值定理，可知存在 $c\in(0,1)$，使得 $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

令 $F(x)=\mathrm{e}^x x(f'(x)-1)$，则 $F(0)=0$，$F(c)=0$. 因 $F(x)$ 在区间$[0,c]$上可导，应用罗尔定理，可知存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$. 由于

$$\begin{aligned}F'(x)&=\mathrm{e}^x[x(f'(x)-1)+(f'(x)-1)+xf''(x)]\\&=\mathrm{e}^x[xf''(x)+(1+x)f'(x)-(1+x)]\end{aligned}$$

即

$$F'(\xi)=\mathrm{e}^\xi[\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)-(1+\xi)]$$

于是 $\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$.

例 2.33（浙江省 2004 年竞赛题） 已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上三阶可导，且 $f(0)=-1$，$f(1)=0$，$f'(0)=0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi),\quad x\in(0,1)$$

解析　令 $F(t)=f(t)-t^2+1-\frac{t^2(t-1)}{x^2(x-1)}[f(x)-x^2+1]$，$x\in(0,1)$，则 $F\in C[0,1]$，$F\in D(0,1)$，且 $F(0)=F(x)=F(1)=0$. 在 $[0,x]$ 与 $[x,1]$ 上分别应用罗尔定理，$\exists\,\xi_1\in(0,x)$，$\xi_2\in(x,1)$，使得

$$F'(\xi_1)=0,\quad F'(\xi_2)=0\quad 且\quad F'(0)=0$$

又 $F'\in C[0,1]$，$F'\in D(0,1)$，因此再在 $[0,\xi_1]$ 与 $[\xi_1,\xi_2]$ 上分别应用罗尔定理，$\exists\,\eta_1\in(0,\xi_1)$，$\eta_2\in(\xi_1,\xi_2)$，使得

$$F''(\eta_1)=0,\quad F''(\eta_2)=0$$

因 $F''\in C[0,1]$，$F''\in D(0,1)$，再在 $[\eta_2,\eta_2]$ 上应用罗尔定理知，$\exists\,\xi\in(\eta_2,\eta_2)\subset(0,1)$ 使 $F'''(\xi)=0$，而 $F'''(t)=f'''(t)-\frac{3!}{x^2(x-1)}[f(x)-x^2-1]$，故 $\exists\,\xi\in(0,1)$，使

$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$$

例 2.34（南京大学 1995 年竞赛题）　设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有三阶导数，$0<a<b<1$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi)$$

解析　令

$$\frac{12}{(b-a)^3}\left[f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))\right]=k$$

则有恒等式

$$f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{(b-a)^3}{12}k\equiv 0 \qquad (*)$$

取辅助函数

$$F(x)=f(a)-f(x)+\frac{1}{2}(x-a)(f'(a)+f'(x))-\frac{(x-a)^3}{12}k$$

由 $(*)$ 式得 $F(b)=0$. 又 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，$F(a)=0$，在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理，必 $\exists\,\eta\in(a,b)$，使得 $F'(\eta)=0$. 由于

$$\begin{aligned}F'(x)&=-f'(x)+\frac{1}{2}(f'(a)+f'(x))+\frac{1}{2}(x-a)f''(x)-\frac{1}{4}(x-a)^2k\\&=\frac{1}{2}(f'(a)-f'(x))+\frac{1}{2}(x-a)f''(x)-\frac{1}{4}(x-a)^2k\end{aligned}$$

所以 $F'(a)=0$. 由于 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，且 $F'(a)=F'(\eta)=0$，对函数 $F'(x)$ 在 $[a,\eta]$ 上应用罗尔定理，必 $\exists\,\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$，使得 $(F'(x))'\Big|_{\xi}=F''(\xi)=0$. 又因为

$$F''(x)=-\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}(x-a)f'''(x)-\frac{1}{2}(x-a)k$$
$$=\frac{1}{2}(x-a)(f'''(x)-k)$$

所以

$$F''(\xi)=\frac{1}{2}(\xi-a)(f'''(\xi)-k)=0$$

于是 $k=f'''(\xi)$，代入(*)式即为所求证的等式.

例 2.35(北京市 1996 年竞赛题)　考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-4x-x^2}, & -4\leqslant x<0,\\ x^3-x^2-2x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

在闭区间$[-4,1]$上是否满足拉格朗日中值定理的条件.若满足，求出该定理结论中ξ的值.

解析　由于

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\sqrt{1-4x-x^2}=1=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^3-x^2-2x+1)=1=f(0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $f(x)\in C[-4,1]$. 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-4x-x^2}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-\frac{1}{2}(4x+x^2)}{x}=-2$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^3-x^2-2x}{x}=-2$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，从而 $f(x)\in D(-4,1)$. 由此 $f(x)$ 在$[-4,1]$上满足拉格朗日中值定理的条件，且有

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2-x}{\sqrt{1-4x-x^2}}, & -4<x<0,\\ 3x^2-2x-2, & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(-4,1)$，满足

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)}=-\frac{2}{5}$$

令$\dfrac{-2-\xi}{\sqrt{1-4\xi-\xi^2}}=-\dfrac{2}{5}$，则 $\xi=\xi_{1,2}=\dfrac{-58\pm 2\sqrt{145}}{29}$，经检验 $\xi_{1,2}\in(-4,0)$；令

$3\xi^2-2\xi-2=-\frac{2}{5}$,则 $\xi=\xi_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{145}}{15}$,经检验 $\xi_{1,2}\in[0,1)$. 因此,满足拉格朗日中值定理条件的 $\xi=\xi_{1,2}=\frac{-58\pm2\sqrt{145}}{29}$.

例 2.36(精选题)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=0$, $f(b)=1$,求证: $\exists\,\xi\in(a,b)$, $\eta\in(a,b)$, $\xi\neq\eta$,使得

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$$

解析　首先应用介值定理,可知 $\exists\,c\in(a,b)$,使得 $f(c)=\frac{1}{2}$. 在区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理,可知 $\exists\,\xi\in(a,c)\subset(a,b)$, $\eta\in(c,b)\subset(a,b)$,且 $\xi\neq\eta$,使得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi)(c-a),\quad f(b)-f(c)=f'(\eta)(b-c)$$

即有

$$\frac{\frac{1}{2}}{f'(\xi)}+\frac{\frac{1}{2}}{f'(\eta)}=c-a+b-c=b-a$$

故

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2(b-a)$$

例 2.37(精选题)　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且有 $f(0)=0$, $f(1)=1$,若 $a>0$, $b>0$,求证: $\exists\,\xi\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$,使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

解析　$\forall\,k\in(0,1)$,应用介值定理, $\exists\,c\in(0,1)$,使得 $f(c)=k$. 在 $[0,c]$ 与 $[c,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, $\exists\,\xi\in(0,c)\subset(0,1)$, $\eta\in(c,1)\subset(0,1)$,且 $\xi\neq\eta$,使得

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)(c-0)$$

$$f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c)$$

即

$$\frac{k}{f'(\xi)}=c,\quad \frac{1-k}{f'(\eta)}=1-c$$

取 $k=\frac{a}{a+b}$,则 $1-k=\frac{b}{a+b}$,代入上式即得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

例 2.38(精选题)　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k>0$,求证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x))=l(l\in\mathbf{R})$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

解析　(1) 因为 $f'(x)\to k(x\to+\infty)$,所以 $\exists N>0$,当 $x>N$ 时,$f'(x)>\frac{k}{2}>0$. 在 $[N,x](x>N)$ 上应用拉格朗日中值定理,$\exists\xi\in(N,x)$,使得

$$f(x)=f(N)+f'(\xi)(x-N)>f(N)+\frac{k}{2}(x-N)$$

令 $x\to+\infty$,得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(2) 取 $k\in\mathbf{R}$,使得 $k+l>0$,则

$$\lim_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x)+k)=l+k>0$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to+\infty}(e^x(f(x)+k))'=\lim_{x\to+\infty}e^x(f'(x)+f(x)+k)=+\infty$$

由(1)得

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x(f(x)+k))=+\infty$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)+k)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(f(x)+k)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(f'(x)+f(x)+k)}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x)+k)=l+k$$

$$\Rightarrow\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=l,\quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x))-\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

例 2.39(全国大学生 2013 年决赛题)　设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上连续可导,且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$$

证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

解析　当 $x\geqslant1$ 时,对于函数 $\ln x$,在区间 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(x,x+1)$,使得

$$\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{\xi},\quad x<\xi<x+1$$

由此可得 $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$,因此 $\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}>0$. 又 $\frac{1}{1+f^2(x)}>0$,所以 $f'(x)>0$,于是 $x\geqslant1$ 时函数 $f(x)$ 严格增. 又因为

$$f'(x)\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x+1}}$$

上式两边从 1 到 x 积分得

$$\begin{aligned}f(x)-f(1)&\leqslant\int_1^x\left(\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x+1}}\right)\mathrm{d}x<\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x+1}}\right)\mathrm{d}x\\&=2(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

即

$$f(x)\leqslant2(\sqrt{2}-1)+f(1)$$

所以函数 $f(x)$ 有上界. 综上,应用单调有界准则即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

例 2.40(精选题)　当 $x\geqslant0$ 时,求证: $\exists\,\theta(x)\in(0,1)$,使得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

并求 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)$.

解析　设 $f(t)=\sqrt{t}$,对函数 $f(t)$ 在区间$[x,x+1]$上应用拉格朗日中值定理, $\exists\,\theta(x)\in(0,1)$,使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)(x+1-x)$$

其中 $\xi=x+\theta(x)\cdot1=x+\theta(x)$,即

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

由上式解得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)^2-x$$

于是

$$\lim_{x\to0^+}\theta(x)=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\theta(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)\right]\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 2.41(全国大学生 2010 年预赛题)　设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数,并且 $f''(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$,且存在一点 x_0 使

得 $f(x_0)<0$，证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实根.

解析 由 $f''(x)>0$，可得 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格增加；由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$ 可得，存在 $b>0$ 使得 $f'(b)>0$；由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$ 可得，存在 $a<0$ 使得 $f'(a)<0$. 由于 $f'(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，应用零点定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$，且当 $x<\xi$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\xi$ 时，$f'(x)>0$. 由于 $f''(\xi)>0$，所以 $f(\xi)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值. 因为 $f(x_0)<0$，所以 $f(\xi)<0$.

任取 $x>\xi$，应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(\xi,x)$，使得

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi)\quad(\text{其中 } f'(\xi_1)>0)$$

由此式可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因此 $\exists d\in(\xi,+\infty)$，使得 $f(d)>0$.

任取 $x<\xi$，应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi_2\in(x,\xi)$，使得

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_2)(x-\xi)\quad(\text{其中 } f'(\xi_2)<0)$$

由此式可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，因此 $\exists c\in(-\infty,\xi)$，使得 $f(c)>0$.

因为 $f(c)>0$，$f(\xi)<0$，$f(d)>0$，$f(x)$ 分别在闭区间 $[c,\xi]$ 与 $[\xi,d]$ 上连续，应用零点定理，$\exists\eta\in(c,\xi)$，$\zeta\in(\xi,d)$，使得 $f(\eta)=f(\zeta)=0$.

因为 $x<\xi$ 时 $f'(x)<0$，$x>\xi$ 时 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\xi]$ 上严格减少，在区间 $[\xi,+\infty)$ 上严格增加，故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\xi)$ 内至多有一个零点，在区间 $(\xi,+\infty)$ 内也至多有一个零点，因此方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实根.

例 2.42（莫斯科钢铁与合金学院 1975 年竞赛题） 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 上是凸的，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解析 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，令 $F(x)=f(x)-A$，则

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-A=0$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸的 $\Leftrightarrow f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格减，因此 $F'(x)=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格减.

$\forall c>0$，若 $F'(c)<0$，在 $[c,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(c,x)$ 使得

$$F(x)=F(c)+F'(\xi)(x-c)<F(c)+F'(c)(x-c)$$

令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$，此与 $F(+\infty)=0$ 矛盾. 故 $\forall x\in(0,+\infty)$，有 $F'(x)\geqslant0$. 于是 $x\to+\infty$ 时，$F'(x)$ 严格减，有下界，应用单调有界准则得 $x\to+\infty$ 时 $F'(x)$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=B\geqslant0$. 若 $B>0$，在区间 $[1,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in(1,x)$，使得

$$F(x)=F(1)+F'(\eta)(x-1)>F(1)+B(x-1)$$

令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，此与 $F(+\infty)=0$ 矛盾. 所以 $B=0$，即

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$$

例 2.43（莫斯科电气学院 1977 年竞赛题）　假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，满足条件：$|f'(x)| \leqslant k|f(x)|$ $(0 < k < 1)$，$f(0) = 0$。求证：$f(x) \equiv 0, x \in [0,1]$。

解析　在 $|f'(x)| \leqslant k|f(x)|$ 中取 $x = 0$，可得 $f'(0) = 0$。$\forall x \in (0,1)$，应用拉格朗日中值定理，$\exists \xi_1 \in (0,x) \subset (0,1)$，使得

$$f(x) = f(0) + f'(\xi_1)x = f'(\xi_1)x$$

于是

$$|f(x)| = |f'(\xi_1)|x \leqslant k|f(\xi_1)|x \tag{1}$$

在 $[0,\xi_1]$ 上再应用拉格朗日中值定理，$\exists \xi_2 \in (0,\xi_1)$，使得

$$f(\xi_1) = f(0) + f'(\xi_2)\xi_1 = f'(\xi_2)\xi_1$$

于是 $|f(\xi_1)| = |f'(\xi_2)|\xi_1 \leqslant k|f(\xi_2)|x$，代入(1)式得

$$|f(x)| \leqslant k^2|f(\xi_2)|x^2 \tag{2}$$

再在 $[0,\xi_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，$\exists \xi_3 \in (0,\xi_2)$，使得

$$|f(x)| \leqslant k^3|f(\xi_3)|x^3 \tag{3}$$

如此继续下去，$\exists \xi_n \in (0,\xi_{n-1})$，使得

$$|f(x)| \leqslant k^n|f(\xi_n)|x^n \tag{4}$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，必有界，即 $\exists M > 0$，使得 $|f(\xi_n)| \leqslant M$ $(n = 1, 2, \cdots)$，而 $0 < k < 1$，$0 < x < 1$，在(4)式右端令 $n \to \infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty} k^n|f(\xi_n)|x^n = 0$$

于是 $f(x) \equiv 0$，$0 \leqslant x < 1$。再由 $f \in C[0,1]$，得

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 0 = 0 = f(1)$$

即 $f(1) = 0$。于是 $f(x) \equiv 0$，$x \in [0,1]$。

例 2.44（莫斯科大学 1975 年竞赛题）　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，且二阶可导，求证：$\exists \xi \in \mathbf{R}$，使得 $f''(\xi) = 0$。

解析　(1) 若 $\exists a,b \in (-\infty, +\infty)$，且 $a < b$，使得 $f'(a) = f'(b)$，令 $F(x) = f'(x)$，则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且有 $F(a) = F(b)$，应用罗尔定理，必 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即 $f''(\xi) = 0$。

(2) 若 $\forall a,b \in (-\infty, +\infty)$，且 $a < b$，$f'(a) \neq f'(b)$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格增或严格减。不妨设 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格增。

$\forall c \in (-\infty, +\infty)$，① 若 $f'(c) \geqslant 0$，则 $f'(1+c) > 0$，当 $x > 1+c$ 时，在 $[1+c, x]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x) = f(1+c) + f'(\xi)(x-1-c)$$
$$> f(1+c) + f'(1+c)(x-1-c)$$

这里 $1+c<\xi<x$. 令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,此与 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界矛盾. ② 若 $f'(c)<0$,当 $x<c$ 时,在$[x,c]$上应用拉格朗日中值定理,有

$$f(x) = f(c) + f'(\eta)(x-c)$$
$$> f(c) + f'(c)(x-c)$$

这里 $x<\eta<c$. 令 $x\to-\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,此与 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界矛盾. 此表明情况(2)不可能发生,只有第(1)种情况发生.

2.2.5 马克劳林公式与泰勒公式的应用(例 2.45—2.65)

例 2.45(江苏省 2004 年竞赛题) 当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x\cos x\cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小,则$c=$ ________,$k=$ ________.

解析 应用三角函数公式化简,有

$$x-\sin x\cos x\cos 2x = x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = x-\frac{1}{4}\sin 4x$$

由于 $\sin u = u-\frac{1}{3!}u^3+o(u^3)$,所以

$$x-\sin x\cos x\cos 2x = x-\frac{1}{4}\left[4x-\frac{1}{6}(4x)^3+o(x^3)\right]$$
$$= x-x+\frac{1}{24}\cdot 4^3x^3+o(x^3)$$
$$= \frac{8}{3}x^3+o(x^3)$$

因 $x\to 0$ 时,原式 $\sim cx^k$,所以 $c=\frac{8}{3}$, $k=3$.

例 2.46(南京大学 1995 年竞赛题) 当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 对于无穷小 x 的阶数等于________.

解析 **方法 1** 应用 $\cos x$ 的马克劳林展式,$x\to 0$ 时,有

$$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$$
$$=1-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)\right]$$
$$=7x^2+o(x^2)$$

所以原式的无穷小阶数等于 2.

方法 2 考虑下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{8}\sin 7x-\frac{1}{8}\sin x}{\sin x\cdot x^k}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin x-\sin 7x}{8x^{k+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x-7\cos 7x}{8(k+1)x^k}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-7\sin x+49\sin 7x}{8(k+1)kx^{k-1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-7\cos x+49\cdot 7\cos 7x}{8(k+1)k(k-1)x^{k-2}}=C$$

因此式的分子已有极限 336，故欲使上式极限 C 为非零数，仅当 $k-2=0$（即 $k=2$）。此时 $C=\dfrac{336}{8\cdot 3\cdot 2}=7$，即原式为 2 阶无穷小.

例 2.47（全国大学生 2016 年决赛题）　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(\pi n!\mathrm{e})$[1].

解析　应用函数 e^x 的马克劳林展开式，并取 $x=1$，得

$$\pi n!\mathrm{e}=\pi n!\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]$$
$$=\pi\left(2\cdot n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n!}\right)+\frac{\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

记 $f(n)=2\cdot n!+\dfrac{n!}{2!}+\dfrac{n!}{3!}+\cdots+\dfrac{n!}{n!}$，$k\in\mathbf{N}^*$，则

$$f(2k)=2\cdot(2k)!+\frac{(2k)!}{2!}+\frac{(2k)!}{3!}+\cdots+\frac{(2k)!}{(2k)!}$$
$$=2\cdot(2k)!+(2k)(2k-1)\cdots 3+(2k)(2k-1)\cdots 4+\cdots+(2k)+1$$

$$f(2k+1)=2\cdot(2k+1)!+\frac{(2k+1)!}{2!}+\frac{(2k+1)!}{3!}+\cdots+\frac{(2k+1)!}{(2k+1)!}$$
$$=2\cdot(2k+1)!+(2k+1)(2k)\cdots 3+(2k+1)(2k)\cdots 4+\cdots+(2k+1)(2k)+(2k+1)+1$$

由此可得 $f(2k)$ 为奇数，$f(2k+1)$ 为偶数. 于是

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(\pi n!\mathrm{e})=\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\pi f(n)+\frac{\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$
$$=\pm\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$
$$=\pm\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)=\pm\pi$$

① 在原题的标准答案中给出极限值为 π.

上式中 n 为奇数时取正号，n 为偶数时取负号，所以原式极限不存在.

例 2.48(莫斯科钢铁与合金学院 1976 年竞赛题)　设 $x>0$ 时，$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，求证：$x\to 0+$ 时，$f(x)=\mathrm{e}+Ax+Bx^2+o(x^2)$，并求 A,B 之值.

解析　应用 $\ln(1+x)$ 与 e^x 的马克劳林展式，有

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)=\exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\right)$$

$$=\exp\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)=\mathrm{e}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)$$

$$=\mathrm{e}\cdot\left[1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)^2+o(x^2)\right]$$

$$=\mathrm{e}-\frac{1}{2}\mathrm{e}x+\frac{11}{24}\mathrm{e}x^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow\qquad A=-\frac{1}{2}\mathrm{e},\quad B=\frac{11}{24}\mathrm{e}$$

例 2.49(莫斯科电子技术学院 1977 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

解析　由于 $x\to 0$ 时，应用等价无穷小因子代换与马克劳林公式，有

$$\tan x-\sin x=\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}\sim\frac{1}{2}x^3$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\tan(\tan x)&=\tan\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\\&=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\&=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\sin x)&=\sin\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\\&=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\&=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)-x+\frac{1}{3}x^3-o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3}=2$$

例 2.50（全国大学生 2012 年决赛题）　求

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

解析

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}-\tan\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]\\
&\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0+}\frac{(2+t^2)e^t-2\sqrt{1+t^6}}{2t^3}\quad\text{（下式应用马克劳林公式）}\\
&=\lim_{t\to0+}\frac{(2+t^2)\left(1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)\right)-2\left(1+\frac{1}{2}t^6+o(t^6)\right)}{2t^3}\\
&=\lim_{t\to0+}\frac{2t+o(t)}{2t^3}=+\infty
\end{aligned}$$

例 2.51（北京市 1999 年竞赛题）　设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且

$$\lim_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$$

试求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解析　由 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$，故

$$\lim_{x\to0}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

由此 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，且

$$3=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}+1$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

应用马克劳林公式，$x\to0$ 时，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)=2\Rightarrow f''(0)=4$$

而

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^2$$

例 2.52(浙江省 2007 年竞赛题)　若 $f(x)$ 二阶可导,且 $f(x)>0,f''(x)f(x)-[f'(x)]^2>0,x\in\mathbf{R}$. (1) 证明: $f(x_1)f(x_2)\geqslant f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$; (2) 若$f(0)=1$,证明: $f(x)\geqslant \mathrm{e}^{f'(0)x},\forall x\in\mathbf{R}$.

解析　(1) 令 $F(x)=\ln f(x)$,则

$$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},\quad F''(x)=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

故 $\forall x\in\mathbf{R},F''(x)>0$,于是 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,有

$$\frac{1}{2}[F(x_1)+F(x_2)]\geqslant F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

即

$$\frac{1}{2}\ln f(x_1)f(x_2)\geqslant \ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

所以

$$f(x_1)f(x_2)\geqslant f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\quad \forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$$

(2) 由马克劳林公式,有

$$\begin{aligned}F(x)&=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(\xi)}{2!}x^2\\&=\ln f(0)+\frac{f'(0)}{f(0)}x+\frac{f''(\xi)f(\xi)-[f'(\xi)]^2}{2f^2(\xi)}x^2\geqslant f'(0)x\end{aligned}$$

故得

$$f(x)\geqslant \mathrm{e}^{f'(0)x},\quad \forall x\in\mathbf{R}$$

例 2.53(全国大学生 2011 年决赛题)　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $f(0),f'(0),f''(0)$ 均不为 0,证明:存在惟一一组实数 k_1,k_2,k_3,使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0$$

解析 应用 $f(x)$ 的马克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

可得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2!}h^2+o(h^2)$$

$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+\frac{4f''(0)}{2!}h^2+o(h^2)$$

$$f(3h)=f(0)+3f'(0)h+\frac{9f''(0)}{2!}h^2+o(h^2)$$

则由

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}\\=&\lim_{h\to0}\left[\frac{(k_1+k_2+k_3-1)f(0)+(k_1+2k_2+3k_3)f'(0)h}{h^2}\right.\\&\left.+\frac{\frac{1}{2}(k_1+4k_2+9k_3)f''(0)h^2+o(h^2)}{h^2}\right]\\=&0\end{aligned}$$

可得 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=1,\\k_1+2k_2+3k_3=0,\\k_1+4k_2+9k_3=0.\end{cases}$ 应用克莱姆法则，解得惟一解 $k_1=3,k_2=-3,k_3=1$.

例 2.54（北京市1990年竞赛题） 设 $f(x)$ 是一定义于长度等于2[①]的闭区间 I 上的实函数，满足 $|f(x)|\leqslant1$，$|f''(x)|\leqslant1$. 对于 $x\in I$，证明：$|f'(x)|\leqslant2$，且有函数使得等式成立.

解析 假设闭区间 $I=[a,a+2]$，$\forall x\in I$，应用泰勒公式，有

$$f(a+2)=f(x)+f'(x)(a+2-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a+2-x)^2,\quad \xi_1\in(x,a+2)$$

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(a-x)^2,\quad \xi_2\in(a,x)$$

两式相减，得

$$f(a+2)-f(a)=2f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a+2-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(a-x)^2$$

于是

①原题为不小于2.

$$2|f'(x)|\leqslant|f(a+2)|+|f(a)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|(a+2-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(a-x)^2$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}(a+2-x)^2+\frac{1}{2}(a-x)^2=4+(a-x)^2+2(a-x)$$

$$\leqslant 4+(a-x)(a+2-x)\leqslant 4$$

故得 $|f'(x)|\leqslant 2, x\in I$.

考虑函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2-1, x\in I=[a,a+2]$,则 $|f(x)|\leqslant 1, f''(x)=1$,且 $f'(x)=x-a$,故 $|f'(x)|\leqslant 2$,当 $x=a+2$ 时,$|f'(x)|=2$.

例 2.55(莫斯科铁路运输工程学院 1977 年竞赛题) 不查表,求方程

$$x^2\sin\frac{1}{x}=2x-1977$$

的近似解,精确到 0.001.

解析 $x\neq 0$ 时,令 $u=\frac{1}{x}$,应用 $\sin u$ 的马克劳林公式,有

$$\sin u=u+\frac{1}{2!}(-\sin(\theta u))u^2$$

这里 $0<\theta<1$. 于是有

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\sin\frac{\theta}{x}$$

代入原方程得

$$x=1977-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x}$$

记 $\alpha=-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x}$. 因 $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$,故 $x>1976$, $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{1976}$, $0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1976}$,于是

$$|\alpha|=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x}<\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{x}<\frac{1}{2\times 1976}<0.001$$

$$x=1977+\alpha\approx 1977$$

例 2.56(莫斯科铁路运输工程学院 1977 年竞赛题) 求一函数 $f(x)$,使其在任一有限区间上有界,且满足方程

$$f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x-x^2$$

解析 本题是求一函数满足方程,而不是求满足方程的函数. 我们可假设函数 $f(x)$ 任意阶可导,且可展为马克劳林级数. 在原式中令 $x=0$ 可得 $f(0)=0$,原式两边求导得

$$f'(x)-\frac{1}{4}f'\left(\frac{x}{2}\right)=1-2x \tag{1}$$

在(1)式中令 $x=0$ 得 $f'(0)=\frac{4}{3}$.(1)式两边求导得

$$f''(x)-\frac{1}{8}f''\left(\frac{x}{2}\right)=-2 \tag{2}$$

在(2)式中令 $x=0$ 得 $f''(0)=-\frac{16}{7}$.(2)式两边求导得

$$f'''(x)-\frac{1}{16}f'''\left(\frac{x}{2}\right)=0 \tag{3}$$

在(3)式中令 $x=0$ 得 $f'''(0)=0$.(3)式两边求导得 $f^{(4)}(x)=0$,如此继续可得

$$f^{(n)}(x)=0\quad(n=5,6,\cdots)$$

因此函数 $f(x)$ 的马克劳林展式为

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4+\cdots\\&=\frac{4}{3}x-\frac{8}{7}x^2\end{aligned}$$

此函数 $f(x)$ 即为所求的函数.

例 2.57(北京邮电大学1996年竞赛题) 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有 n 阶连续导数,且

$$f^{(k)}(x_0)=0\quad(k=2,3,\cdots,n-1)\quad 且\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

当 $0<|h|<\delta$ 时,有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),\quad 0<\theta<1 \tag{*}$$

试证:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

解析 运用泰勒公式,有

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\\&=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n,\quad \xi 介于 x_0,x_0+h 间\end{aligned}$$

类似有

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},\quad \eta 介于 x_0,x_0+\theta h 间$$

将两式代入(*)式并化简可得

$$f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n=h\left[f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}\right]$$

故$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n}=f^{(n)}(\eta)\cdot\theta^{n-1}$. 令 $h\to 0$,则 $\xi\to x_0,\eta\to x_0$,由 $f^{(n)}(x)$ 的连续性得

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n}=f^{(n)}(x_0)\left(\lim_{h\to 0}\theta\right)^{n-1}$$

由于 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,故$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

例 2.58(全国大学生 2014 年决赛题) 设 $f\in C^{(4)}(-\infty,+\infty)$,且

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2 \qquad (*)$$

其中 θ 是与 x,h 无关的常数,证明:f 是不超过 3 次的多项式.

解析 若 $f(x)$ 是不超过 2 次的多项式,因 $f''(x)\equiv$ 常数,所以 $\forall\theta\in(0,1)$,(*)式成立.

下面不妨设 $f(x)$ 不是不超过 2 次的多项式. 对函数 $f''(x)$ 应用泰勒公式,在 x 与 $x+\theta h$ 之间必存在 ξ,使得

$$f''(x+\theta h)=f''(x)+f'''(x)\theta h+\frac{1}{2}f^{(4)}(\xi)(\theta h)^2$$

其中 θ 为 0,1 之间的常数. 将上式代入(*)式并化简得

$$\frac{1}{2}f^{(4)}(\xi)\theta^2=\frac{2f(x+h)-2f(x)-2f'(x)h-f''(x)h^2-f'''(x)\theta h^3}{h^4}$$

此式两边令 $h\to 0$,并应用洛必达法则,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f^{(4)}(x)\theta^2&=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+h)-2f'(x)-2f''(x)h-3f'''(x)\theta h^2}{4h^3}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)-3f'''(x)\theta h}{6h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f'''(x+h)-3f'''(x)\theta}{12h}\quad\left(\text{此式右端极限存在}\Leftrightarrow\theta=\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{f^{(4)}(x)}{12}\end{aligned}$$

由此可得 $f^{(4)}(x)\equiv 0$,于是函数 $f(x)$ 是 3 次多项式,且此时 $\theta=\frac{1}{3}$.

综上可得 $f(x)$ 是不超过 3 次的多项式.

例 2.59(全国大学生 2012 年决赛题) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微,并且满足:存在 $M>0$,使得

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant M\quad(x\in(-\infty,+\infty),k=1,2,\cdots)$$

且满足 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0(n=1,2,\cdots)$.求证:在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$.

解析　首先,由 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right)=f(0)=0$. 对函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2^n}\right]$ 应用拉格朗日中值定理,必 $\exists\xi_1(n)\in\left(0,\frac{1}{2^n}\right)$,使得

$$0=f\left(\frac{1}{2^n}\right)=f(0)+f'(\xi_1(n))\frac{1}{2^n}=f'(\xi_1(n))\frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow\forall n\in\mathbf{N}^*,\text{有 } f'(\xi_1(n))=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f'(\xi_1(n))=f'(0)=0$$

应用马克劳林公式,必 $\exists\xi_2(n)\in\left(0,\frac{1}{2^n}\right)$,使得

$$0=f\left(\frac{1}{2^n}\right)=f(0)+f'(0)\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2!}f''(\xi_2(n))\left(\frac{1}{2^n}\right)^2=\frac{1}{2!}f''(\xi_2(n))\left(\frac{1}{2^n}\right)^2$$
$$\Rightarrow\forall n\in\mathbf{N}^*,\text{有 } f''(\xi_2(n))=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f''(\xi_2(n))=f''(0)=0$$

依此类推,应用马克劳林公式可得,$\forall k\in\mathbf{N}^*$,有 $f^{(k)}(0)=0$. $\forall x_0\in\mathbf{R}$,再应用马克劳林公式,在 0 与 x_0 之间必存在 ξ,使得

$$\begin{aligned}f(x_0)&=f(0)+f'(0)x_0+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x_0^k+\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)x_0^{k+1}\\&=\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)x_0^{k+1}\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{M}{(k+1)!}x_0^{k+1}=M(e^{x_0}-1)$,所以

$$\left|\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)x_0^{k+1}\right|\leqslant\frac{M}{(k+1)!}x_0^{k+1}\to 0\quad(k\to+\infty)$$

因此 $f(x_0)=0$. 由 $x_0\in\mathbf{R}$ 的任意性,即得 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)\equiv 0$.

例 2.60(莫斯科纺织学院 1977 年竞赛题)　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,当 $0<x<+\infty$ 时,$|f''(x)|\leqslant 1$,求证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解析　$\forall\varepsilon>0$,应用泰勒公式,有

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+f'(x)\varepsilon+\frac{1}{2!}f''(\xi)\varepsilon^2$$

这里 $x>0$, $x<\xi<x+\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=\left|\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}-\frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon\right|\\&\leqslant\frac{1}{\varepsilon}|f(x+\varepsilon)-f(x)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|\varepsilon\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \mid f(x+\varepsilon)-f(x) \mid + \frac{1}{2}\varepsilon$$

令 $x \to +\infty$，得

$$\lim_{x\to+\infty} \mid f'(x) \mid \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\cdot 0 + \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \mid f'(x) \mid = 0$，即

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

例 2.61（莫斯科电子技术学院 1977 年竞赛题）　设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0) = f(1) = 0$，$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$，求证：$\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8$.

解析　因 $f \in C[0,1]$，由最值定理，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最小值存在，令

$$f(C) = \min_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = -1$$

因 $f(x)$ 在 $x = C$ 处可导，所以 $f'(C) = 0$. 函数 $f(x)$ 在 $x = C$ 处的泰勒展式为

$$f(x) = f(C) + f'(C)(x-C) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-C)^2 \tag{1}$$

这里 ξ 介于 C 与 x 之间，在(1)式中分别令 $x = 0$ 与 $x = 1$，得

$$0 = f(0) = f(C) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)C^2 = -1 + \frac{1}{2}f''(\xi_1)C^2 \tag{2}$$

$$0 = f(1) = f(C) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-C)^2 = -1 + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-C)^2 \tag{3}$$

这里 $0 < \xi_1 < C, C < \xi_2 < 1$. 于是有

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{C^2},\quad f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-C)^2}$$

(1) 当 $C = \frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 8$；

(2) 当 $0 < C < \frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1) > \dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8$；

(3) 当 $\frac{1}{2} < C < 1$ 时，$f''(\xi_2) > \dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 8$.

综上，可得 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x) \geqslant 8$.

例 2.62（江苏省 2006 年竞赛题）　某人由甲地开汽车出发，沿直线行驶，经过 2 h 到达乙地停止，一路通畅. 若开车的最大速度为 100 km/h，求证：该汽车在行驶途中加速度的变化率的最小值不大于 -200 km/h^3.

解析　设 t 为时间，$v(t)$ 为速度，$a(t)$ 为加速度，则 $v(0)=0$，$v(2)=0$，设时刻 t_0 速度达最大值，则 $v(t_0)=100$，$v'(t_0)=a(t_0)=0$，由泰勒公式，有

$$v(t)=v(t_0)+v'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}a'(\xi)(t-t_0)^2$$

$$=100+\frac{1}{2}a'(\xi)(t-t_0)^2$$

其中 ξ 介于 t 与 t_0 之间. 分别令 $t=0$ 与 $t=2$，得

$$v(0)=0=100+\frac{1}{2}a'(\xi_1)t_0^2$$

$$v(2)=0=100+\frac{1}{2}a'(\xi_2)(2-t_0)^2$$

其中 $0<\xi_1<t_0<\xi_2<2$.

(1) 若 $t_0=1$，则 $a'(\xi_1)=a'(\xi_2)=-200$；

(2) 若 $0<t_0<1$，则 $a'(\xi_1)=-\dfrac{200}{t_0^2}<-200$；

(3) 若 $1<t_0<2$，则 $a'(\xi_2)=-\dfrac{200}{(1-t_0)^2}<-200$.

于是

$$\min a'(t)\leqslant\min\{a'(\xi_1),a'(\xi_2)\}\leqslant-200$$

例 2.63（精选题）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=0$，$f'(b)=0$. 求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

解析　函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 处的泰勒展式分别为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x-a)^2 \tag{1}$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}f''(\eta_1)(x-b)^2 \tag{2}$$

这里 $\xi_1\in(a,x)$，$\eta_1\in(x,b)$.

在(1)和(2)式中分别令 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1')\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$$

$$=f(a)+\frac{1}{8}f''(\xi_1')(b-a)^2 \tag{3}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\eta_1')\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2$$

$$=f(b)+\frac{1}{8}f''(\eta_1')(b-a)^2 \tag{4}$$

这里 $\xi_1'\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\eta_1'\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$. (3) 式减(4) 式得

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{8}[f''(\xi_1')-f''(\eta_1')](b-a)^2$$

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}|f''(\xi_1')-f''(\eta_1')|(b-a)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{8}(|f''(\xi_1')|+|f''(\eta_1')|)(b-a)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\max(|f''(\xi_1')|,|f''(\eta_1')|)(b-a)^2$$

$$=\frac{1}{4}|f''(\xi)|(b-a)^2$$

这里 $\xi=\xi_1'$ 或 η_1',且上式即为原式.

例 2.64(精选题) (1) 根据 e^x 的两种形式余项的马克劳林展开式

$$e^x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1}$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)+\frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^n dt \tag{2}$$

证明:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}>\frac{1}{2}e^x\quad(0\leqslant x\leqslant n) \tag{3}$$

(2) 求证:$\exists\xi\in(50,100)$,使得

$$\int_0^{\xi}e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{100}}{100!}\right)dx=50$$

解析 应用(2) 式,有

$$(3)\text{ 式}\Leftrightarrow\frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^n dt<\frac{1}{2}e^x \tag{4}$$

应用 $n!=\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^n dt$,有

$$(4)\text{ 式}\Leftrightarrow 2\int_0^x e^{t-x}(x-t)^n dt<\int_0^{+\infty}e^{-t}t^n dt$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^x e^{-u}u^n du<\int_0^{+\infty}e^{-t}t^n dt\quad(\text{令 }u=x-t) \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x e^{-t}t^n dt<\int_x^{+\infty}e^{-t}t^n dt\quad(0\leqslant x\leqslant n)$$

下面证明：$\int_0^x e^{-t}t^n dt < \int_x^{2x} e^{-t}t^n dt$. 当此式成立时，(5) 式自然成立. 令 $2x - t = u$，则

$$\int_x^{2x} e^{-t}t^n dt = \int_0^x e^{u-2x}(2x-u)^n du = \int_0^x e^{-(2x-t)}(2x-t)^n dt$$

记 $f(t) = e^{-t}t^n$，则只需证明 $f(t) < f(2x-t)(0 < t < x \leqslant n)$，即

$$2(t-x) + n\ln(2x-t) > n\ln t \tag{6}$$

令 $g(t) = 2(t-x) + n\ln(2x-t) - n\ln t(0 < t < x \leqslant n)$，则 $g(x) = 0, g'(t) = 2 - \frac{2nx}{t(2x-t)}$. 因为 $nx \geqslant x^2 > 2tx - t^2$，所以 $g'(t) < 0$. 从而 $g(t)$ 严格递减，故 $g(t) > g(x) = 0$，得(6) 式成立.

(2) 令

$$f(t) = \int_0^t e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}\right)dx$$

则 $f(t) \in C[50,100]$，且

$$f(50) = \int_0^{50} e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}\right)dx < \int_0^{50} e^{-x} \cdot e^x dx = 50$$

$$f(100) = \int_0^{100} e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{100}}{100!}\right)dx > \int_0^{100} e^{-x} \cdot \frac{1}{2}e^x dx = 50$$

应用介值定理，$\exists \xi \in (50,100)$，使得 $f(\xi) = 50$.

例 2.65（莫斯科大学 1977 年竞赛题）　设函数 $f(x)$ 在区间$(-1,1)$上任意阶可导，且 $f^{(n)}(0) \neq 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$，又设对 $0 < |x| < 1$ 和 $n \in \mathbf{N}$，有泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

这里 $0 < \theta < 1$. 试求 $\lim\limits_{x \to 0}\theta$.

解析　由题给条件得

$$f^{(n)}(\theta x) = \frac{n!\left(f(x) - f(0) - f'(0)x - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right)}{x^n}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{\theta x} \cdot \theta \\
&= \frac{n!\left(f(x) - f(0) - f'(0)x - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right) - f^{(n)}(0)x^n}{x^{n+1}}
\end{aligned} \tag{*}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(\theta x)-f^{(n)}(0)}{\theta x}=f^{(n+1)}(0)\neq 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{n!\left(f(x)-f(0)-f'(0)x-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right)-f^{(n)}(0)x^n}{x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n!f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)n!}{(n+1)!x}\quad (n\text{ 次应用洛必达法则})$$

$$=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$$

故(*)式两边求极限得

$$f^{(n+1)}(0)\cdot\lim_{x\to 0}\theta=f^{(n+1)}(0)\cdot\frac{1}{n+1}$$

于是$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

2.2.6　利用洛必达法则求极限(例 2.66—2.77)

例 2.66(江苏省 2002 年竞赛题)　已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^k}=c\,(c\neq 0)$,求 k 和 c.

解析　应用等价无穷小因子代换与洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{kx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{kx^{k-1}\cos^2 x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^{k-1}}=c$$

因为 $c\neq 0$,所以 $k-1=2$,于是

$$\text{原式}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}=c$$

所以 $k=3,c=\frac{1}{3}$.

例 2.67(南京大学 1996 年竞赛题)　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}}\right)=$ ________.

解析　令 $x=\frac{1}{t}$,并运用洛必达法则,则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2t+t^3}-e^t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+2t+t^3)^{-\frac{2}{3}}(2+3t^2)-e^t}{1}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2-1=-\frac{1}{3}$$

例 2.68(南京大学 1996 年竞赛题)　求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解析　化简后应用洛必达法则,有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln(1+x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$$

例 2.69(江苏省 2000 年竞赛题)　求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

解析　应用洛必达法则,并应用取对数求导法则,有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(x\ln x)'-1}{\frac{1}{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)-1}{1-x}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}}{-1}=-2$$

例 2.70(江苏省 2016 年竞赛题)　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin(\sin(\sin x))}{\sin x\cdot\sin(\sin x)\cdot\sin(\sin(\sin x))}$.

解析　令 $\sin x=u$,则

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u-\sin(\sin u)}{u\cdot\sin u\cdot\sin(\sin u)}$$

应用等价无穷小代换与洛必达法则得

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u-\sin(\sin u)}{u^3}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-\cos(\sin u)\cdot\cos u}{3u^2}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(\sin u)}{3u^2}\cdot\lim_{u\to 0}\cos u=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(\sin u)}{3u^2}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin^2 u}{3u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{6u^2}=\frac{1}{6}$$

例 2.71(江苏省 2016 年竞赛题)　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\tan(\tan x))}{\tan x\cdot\tan(\tan x)\cdot\tan(\tan(\tan x))}$.

解析　令 $\tan x=u$,则

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\frac{\tan u-\tan(\tan u)}{u\cdot\tan u\cdot\tan(\tan u)}$$

应用等价无穷小代换与洛必达法则得

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\frac{\tan u-\tan(\tan u)}{u^3}=\lim_{u\to 0}\frac{\sec^2 u-\sec^2(\tan u)\cdot\sec^2 u}{3u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-\sec^2(\tan u)}{3u^2}\cdot\lim_{u\to 0}\sec^2 u = \lim_{u\to 0}\frac{1-\sec^2(\tan u)}{3u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{-\tan^2(\tan u)}{3u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{-u^2}{3u^2} = -\frac{1}{3}$$

例 2.72(江苏省 2012 年竞赛题) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 3 阶可导，且 $f'(0)=0$，$f''(0)=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1)-f(x)}{x^3}$.

解析 应用洛必达法则及等价无穷小替换，则

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x f'(e^x-1)-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x f'(e^x-1)+e^{2x}f''(e^x-1)-f''(x)}{6x}$$

$$= \frac{1}{6}\Big(\lim_{x\to 0}e^x\frac{f'(e^x-1)-f'(0)}{e^x-1}+\lim_{x\to 0}e^{2x}\frac{f''(e^x-1)-f''(0)}{e^x-1}$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3(e^{2x}-1)}{x}\Big)$$

$$= \frac{1}{6}(f''(0)+f'''(0)-f'''(0)+6) = \frac{3}{2}$$

例 2.73(南京大学 1995 年竞赛题) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(2-\cos x)-3[(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}-1]}{[x\ln(1+x)]^2}$.

解析 $原式 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(2-\cos x)-3[(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}-1]}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin x}{2-\cos x}-(1+\sin^2 x)^{-\frac{2}{3}}2\sin x\cos x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{2}{3}}-(2-\cos x)\cos x}{(2-\cos x)2x^2(1+\sin^2 x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{2}{3}}-(2-\cos x)\cos x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3}(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{3}}\sin 2x+2\sin x-\sin 2x}{4x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{3}}\frac{\sin 2x}{4x}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{4x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

例 2.74(全国大学生 2010 年预赛题) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解析 应用洛必达法则，得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right) \quad \left(\text{令}\frac{1}{x}=t\right) \\
&= \lim_{t\to0}\exp\left(\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\right)=\lim_{t\to0}\exp\left[\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}\right] \\
&= \lim_{t\to0}\exp\left(\frac{-t}{2t(1+t)}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}
$$

注：本题的一个错误解法是

$$
\text{原式} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x}e^x = 1.
$$

例 2.75（浙江省 2006 年竞赛题）　求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right]$.

解析　先考虑 $\lim\limits_{t\to+\infty} t\left[\left(1+\frac{x}{t}\right)^t-e^x\right]$. 令 $r=\frac{1}{t}$，应用等价无穷小因子代换与洛必达法则，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} t\left[\left(1+\frac{x}{t}\right)^t-e^x\right] &= \lim_{r\to0+}\frac{(1+rx)^{\frac{1}{r}}-e^x}{r} = e^x\lim_{r\to0+}\frac{e^{\frac{1}{r}\ln(1+rx)-x}-1}{r} \\
&= e^x\lim_{r\to0+}\frac{\ln(1+rx)-rx}{r^2} = e^x\lim_{r\to0+}\frac{\frac{x}{1+rx}-x}{2r} \\
&= xe^x\lim_{r\to0+}\frac{-rx}{2r(1+rx)} = -\frac{x^2}{2}e^x
\end{aligned}
$$

故原式 $=-\frac{x^2}{2}e^x$.

例 2.76（全国大学生 2009 年预赛题）　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

解析　利用关于 e 的重要极限与洛必达法则，得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{n}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}\cdot\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n)e}{nx}} \\
&= \exp\left(\lim_{x\to0}\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n)e}{nx}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to0}\frac{(e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx})e}{n}\right)=e^{\frac{n+1}{2}e}
\end{aligned}
$$

例 2.77（莫斯科石油与天然气工业学院 1976 年竞赛题）　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解析 原式 $= \exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}\right)}{x}\right] = \exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sec^2\dfrac{\pi x}{1+2x}}{\tan\dfrac{\pi x}{1+2x}}\cdot\dfrac{\pi}{(1+2x)^2}\right]$

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}}{\sin\dfrac{2\pi x}{1+2x}}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{8\pi}{(1+2x)^3}}{\cos\dfrac{2\pi x}{1+2x}\cdot\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}}\right]$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+2x}\right) = e^0 = 1$$

2.2.7 导数在几何上的应用(例 2.78—2.95)

例 2.78(江苏省 2016 年竞赛题) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微,且满足

$$2f(2+x)+f(2-x) = 3+2x+o(x) \tag{1}$$

这里 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小(当 $x\to 0$ 时),试求微分 $\mathrm{d}f(x)\Big|_{x=2}$,并求曲线 $y=f(x)$ 在点$(2,f(2))$处的切线方程.

解析 因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微即可导,所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,又函数

$$\varphi(x) = 2+x,\quad \psi(x) = 2-x$$

在 $x=0$ 处连续,在(1)式中令 $x\to 0$ 得 $2f(2)+f(2)=3$,因此 $f(2)=1$.

将(1)式化为

$$\frac{2(f(2+x)-f(2))}{x} - \frac{f(2-x)-f(2)}{-x} = 2+\frac{o(x)}{x} \tag{2}$$

因 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导,应用导数的定义得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x} = f'(2),\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(2-x)-f(2)}{-x} = f'(2)$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2+\dfrac{o(x)}{x}\right)=2$,故在(2)式两边求极限得 $f'(2)=2$,即

$$\mathrm{d}f(x)\Big|_{x=2} = f'(2)\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x$$

且曲线 $y=f(x)$ 在点$(2,1)$处的切线方程为

$$y-1 = f'(2)(x-2),\quad 即\quad 2x-y=3$$

例 2.79(江苏省 2000 年竞赛题) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2 = 1-e^{-x}$,若 $f'(x_0)=0\ (x_0\neq 0)$,则 ( )

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 极值,$(x_0,f(x_0))$ 不是 $y=f(x)$ 拐点

解析 在原式中取 $x = x_0$，得

$$f''(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0}$$

当 $x_0 > 0$ 时，因为 $1 - e^{-x_0} > 0$，所以 $f''(x_0) > 0$；当 $x_0 < 0$ 时，因为 $1 - e^{-x_0} < 0$，所以 $f''(x_0) > 0$. 即 $\forall x_0 \neq 0$ 有 $f''(x_0) > 0$，所以 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 故选 C.

例 2.80（江苏省 2012 年竞赛题） 在下面两题中，分别指出满足条件的函数是否存在？若存在，举一例，并证明满足条件；若不存在，请给出证明.

（1）函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，但在 $x = 0$ 的某去心邻域内处处不可导；

（2）函数 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 上一阶可导（$\delta > 0$），$f(0)$ 为极值，且 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解析 （1）满足条件的的函数存在，例如

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

证明如下：因为 $0 \leqslant \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leqslant \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x|$，故由夹逼准则可得 $\lim\limits_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = 0$，所以 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. $\forall a \neq 0$，若 a 为无理数，则 $f(a) = 0$，当 x_n 取有理数趋向于 a 时，$\lim\limits_{x_n \to a} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim\limits_{x_n \to a} \frac{x_n^2}{x_n - a} = \infty$；若 a 为有理数，则 $f(a) = a^2 \neq 0$，当 x_n 取无理数趋向于 a 时，$\lim\limits_{x_n \to a} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim\limits_{x_n \to a} \frac{0 - a^2}{x_n - a} = \infty$. 综上可知 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不可导，于是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任何去心邻域内处处不可导.

（2）满足条件的函数不存在，证明如下（用反证法）：因为 $f(0)$ 是极值，所以 $f'(0) = 0$. 不妨设 $f(0)$ 为极小值，若 $(0, f(0))$ 是拐点，则存在 $x = 0$ 的去心邻域 $U = \{x \mid 0 < |x| < \delta_1\}(\delta_1 \leqslant \delta)$，使得在 U 中 $x = 0$ 的左、右侧，$f'(x)$ 的严格单调性相反. 不妨设 $-\delta_1 < x < 0$ 时，$f'(x)$ 严格增加，$0 < x < \delta_1$ 时，$f'(x)$ 严格减少. 因 $f'(0) = 0$，于是 $\forall x \in U$，都有 $f'(x) < 0$. 因此 $0 < x < \delta_1$ 时，函数 $f(x)$ 单调减少，故 $f(0)$ 不可能是 $f(x)$ 的极小值. 此与 $f(0)$ 为极小值矛盾，所以满足题目条件的函数不存在.

例 2.81（江苏省 2012 年竞赛题） 求一个次数最低的多项式 $P(x)$，使得它在 $x = 1$ 时取极大值 2，且 $(2, 0)$ 是曲线 $y = P(x)$ 的拐点.

解析 令 $P''(x) = a(x - 2)$，积分得

$$P'(x) = a\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + b, \quad P(x) = a\left(\frac{x^3}{6} - x^2\right) + bx + c$$

由题知 $P'(1) = -\frac{3}{2}a + b = 0$，$P(1) = -\frac{5}{6}a + b + c = 2$，$P(2) = -\frac{8}{3}a + 2b + c$

$=0$,解得 $a=6,b=9,c=-2$,故所求多项式

$$P(x)=x^3-6x^2+9x-2$$

例 2.82(浙江省 2008 年竞赛题)　证明:方程 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$ 当 n 为奇数时有且仅有一个实根.

解析　令 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$,则 $f_n(0)=1$. 当 $x\geqslant 0$ 时,$f_n(x)$ 单调递增,故 $f_n(x)=0$ 在$[0,+\infty)$上没有实根. 令 $n=2k+1$,则当 $x\to-\infty$ 时,$f_{2k+1}(x)\to-\infty$,因此 $f_{2k+1}(x)=0$ 在$(-\infty,0)$上至少有一个实根.

假设存在 x_1,x_2 满足 $-\infty<x_1<x_2<0$ 是方程 $f_{2k+1}(x)=0$ 的相邻两根,则 $f_{2k+1}(x_1)=f_{2k+1}(x_2)=0$. 因为

$$f'_{2k+1}(x)+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=f_{2k+1}(x)$$

故 $f'_{2k+1}(x_1)=-\frac{x_1^{2k+1}}{(2k+1)!}>0$,$f'_{2k+1}(x_2)>0$,所以 x_1,x_2 均是方程的单根. 又因 $f'_{2k+1}(x)$ 在 $f_{2k+1}(x)=0$ 的相邻两根处符号相反,此与 $f'_{2k+1}(x_1)>0$,$f'_{2k+1}(x_2)>0$ 矛盾. 从而方程 $f_{2k+1}(x)=0$ 有且仅有一个实根.

例 2.83(江苏省 1998 年竞赛题)　已知函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上二阶可导,对于$[a,b]$内每一点 x,$f(x)f''(x)\geqslant 0$,且在$[a,b]$的任何子区间上 $f(x)$ 不恒等于零. 试证:$f(x)$ 在$[a,b]$中至多有一个零点.

解析　**方法 1**(反证法)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$中有两个零点 x_1 与 $x_2(x_1<x_2)$. 因 $f(x)f''(x)\geqslant 0$,所以

$$(f(x)f'(x))'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)\geqslant 0$$

假设 $g(x)=f(x)f'(x)$,则 $g(x)$ 单调增. 又因为 $g(x_1)=g(x_2)=0$,故 $\forall x\in[x_1,x_2]$,$g(x)=0$. 由于 $\forall x\in[x_1,x_2]$,有

$$(f^2(x))'=2f(x)f'(x)=2g(x)=0$$

所以 $\forall x\in[x_1,x_2]$,$f^2(x)=k$,而 $f(x_1)=0$,于是 $\forall x\in[x_1,x_2]$,$f(x)=0$,从而导出了矛盾.

方法 2(反证法)　设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$中的两个相邻零点. 不妨设 $\forall x\in(x_1,x_2)$,$f(x)>0$. 由于 $f(x)f''(x)\geqslant 0$,故 $f''(x)\geqslant 0$,$x\in[x_1,x_2]$,因此 $f'(x)$ 单调增.

在 x_1 的右邻域内 $f(x)>0$,所以 $f'(x_1)\geqslant 0$;在 x_2 的左邻域内 $f(x)>0$,所以 $f'(x_2)\leqslant 0$. 于是 $\forall x\in[x_1,x_2]$,$f'(x)=0$,而 $f(x_1)=0$,故 $f(x)$ 在$[x_1,x_2]$上为常数 0,导出了矛盾.

例 2.84(北京市 2000 年竞赛题)　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0(n\geqslant 2)$ 是实系数多项式,且某个 $a_k=0(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 及当 $i\neq k$ 时 $a_i\neq 0$,证明:若 $f(x)=0$ 有 n 个相异的实根,则 $a_{k-1}a_{k+1}<0$.

解析　对多项式 $f(x)$ 求 $(k-1)$ 阶导数，得

$$f^{(k-1)}(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-k+1}x^{n-k+1}$$

其中 $b_0=a_{k-1}\cdot(k-1)!\neq 0, b_1=a_k\cdot k!=0, b_2=a_{k+1}\cdot\dfrac{(k+1)!}{2!}\neq 0$. 因为 $f(x)=0$ 有 n 个相异的实根，故由罗尔定理知 $f^{(k-1)}(x)=0$ 有 $(n-k+1)$ 个相异实根，令为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-k+1}$，且 $x_1x_2\cdots x_{n-k+1}=(-1)^{n-k+1}b_0\neq 0$. 取多项式

$$g(x)=b_{n-k+1}+b_{n-k}x+\cdots+b_2x^{n-k-1}+b_1x^{n-k}+b_0x^{n-k+1}$$

则 $g(x)=0$ 有 $(n-k+1)$ 个互异实根 $x_1^{-1},x_2^{-1},\cdots,x_{n-k+1}^{-1}$. 由于

$$g^{(n-k-1)}(x)=b_2\cdot(n-k-1)!+b_1\cdot(n-k)!x+b_0\cdot\frac{(n-k+1)!}{2!}x^2=0$$

有两个互异实根，根据 $b_1=0$ 可知

$$\Delta=0-4b_2(n-k-1)!\cdot b_0\frac{(n-k+1)!}{2}>0$$

即 $b_0\cdot b_2<0$，故 $a_{k-1}\cdot a_{k+1}<0$.

例 2.85（江苏省 2004 年竞赛题）　假设 k 为常数，方程 $kx-\dfrac{1}{x}+1=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恰有一根，求 k 的取值范围.

解析　**方法 1**　令 $f(x)=kx-\dfrac{1}{x}+1\ (x>0)$，则 $f'(x)=k+\dfrac{1}{x^2}$.

(1) 当 $k>0$ 时，因 $f(0+)=-\infty$，$f(+\infty)=+\infty$，且 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 严格增. 于是 $k>0$ 时 $f(x)$ 恰有一个零点(即 $f(x)=0$ 恰有一根).

(2) 当 $k=0$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{x}+1=0$ 恰有一根 $x=1$.

(3) 当 $k<0$ 时，因 $f(0+)=-\infty$，$f(+\infty)=-\infty$，令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{-k}}$. $0<x<x_0$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 严格增；$x>x_0$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 严格减. 所以 $f(x_0)=1-2\sqrt{-k}$ 为极大值. 令 $f(x_0)=0$，得 $k=-\dfrac{1}{4}$，此时 $f(x)$ 在 $x>0$ 上恰有一零点.

故 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有一根时 k 的取值范围是 $\left\{k\,\middle|\,k=-\dfrac{1}{4}\text{ 或 }k\geqslant 0\right\}$.

方法 2　用初等数学方法求解. 原方程 $\Leftrightarrow kx^2+x-1=0$，令

$$f(x)=kx^2+x-1\quad(x>0)$$

(1) $k=0$ 时，$f(x)=x-1=0$ 恰有一根 $x=1$.

(2) $k\neq 0$ 时，若 $1+4k>0$，$f(x)=0$ 的根为

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4k}}{2k}<0,\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2k}>0$$

解得 $k>0$；若 $1+4k=0\left(即\ k=-\frac{1}{4}\right)$，$f(x)=0$ 有一根 $x=2$；若 $1+4k<0$，$f(x)=0$ 无根.

故 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有一根时 k 的取值范围是 $\left\{k\,\middle|\,k=-\frac{1}{4}\ 或\ k\geqslant 0\right\}$.

例 2.86（江苏省 1996 年竞赛题） 设 $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt[x]{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的连续性，并求单调区间、极值与渐近线.

解析 因为 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$，所以

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt[x]{x}=\exp\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

而 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续；$x>0$ 时 $f(x)$ 为初等函数，所以连续. 因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

因为 $x>0$ 时 $f'(x)=\sqrt[x]{x}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得驻点为 $x=\mathrm{e}$. 因 $\sqrt[x]{x}>0$，且当 $0<x<\mathrm{e}$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上严格增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上严格减.

由上述 $f(x)$ 的单调性得 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 为极大值，无极小值.

由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}\right)=\mathrm{e}^0=1$$

所以 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=1$.

例 2.87（浙江省 2009 年竞赛题） 设函数 f 满足 $f''(x)>0$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant\max\{f(0),f(1)\}$.

解析 记 $\max\{f(0),f(1)\}=d$. 由 $f''(x)>0$，得 $y=f(x)$ 的图形是凹的，于是 $\forall x\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f((1-x)\cdot 0+x\cdot 1)\leqslant(1-x)f(0)+xf(1)\\&\leqslant d(1-x)+dx=d\end{aligned}\tag{1}$$

又 $\forall x_0\in(0,1)$，考虑连接点 $(0,f(0))$，$(x_0,f(x_0))$，$(1,f(1))$ 的折线，有

$$y=g(x)=\begin{cases}f(0)+\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}(x-0), & x\in[0,x_0];\\[2ex] f(x_0)+\dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}(x-x_0), & x\in(x_0,1]\end{cases}$$

由于 $y=f(x)$ 的图形是凹的，则 $f(x)\leqslant g(x)$，故

$$0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(f(0)+f(x_0))x_0+\frac{1}{2}(f(x_0)+f(1))(1-x_0)$$

$$=\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}(f(0)x_0+f(1)(1-x_0))$$

即

$$-f(x_0)\leqslant f(0)x_0+f(1)(1-x_0)\leqslant dx_0+d(1-x_0)=d \tag{2}$$

由(1)和(2)知 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant d$，即 $|f(x)|\leqslant\max\{f(0),f(1)\}$.

例 2.88（南京大学 1995 年竞赛题）　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $f'(x)$ 单调上升，求证：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调上升.

解析　令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}\ (x>0)$，则

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2}$$

应用拉格朗日中值定理，$\exists\,\xi\in(0,x)$，使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$$

于是

$$F'(x)=\frac{x(f'(x)-f'(\xi))}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}$$

由 $f'(x)$ 单调增，所以 $f'(\xi)\leqslant f'(x)$，代入上式得 $F'(x)\geqslant 0$，故 $F(x)$ 单调增.

例 2.89（莫斯科技术物理学院 1977 年竞赛题）　就参数 a 讨论方程 $\mathrm{e}^x=ax^2$ 实根的个数.

解析　$a\leqslant 0$ 时，由于 $\mathrm{e}^x>0$，所以原方程无实根. 下面令 $a>0$. 令 $f(x)=\mathrm{e}^x x^{-2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$，$f(+\infty)=+\infty$，$f(-\infty)=0$. 又

$$f'(x)=\mathrm{e}^x x^{-3}(x-2)$$

所以

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	0	+
$f(x)$	↑	↓		↑

于是当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 从 0 严格增加到 $+\infty$；当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)$ 从 $+\infty$ 严格减少到 $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)$ 从 $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2$ 严格增加到 $+\infty$. 因此得到：当 a

$\leqslant 0$ 时,原方程无实根;当 $0 < a < \frac{1}{4}e^2$ 时,原方程有一个实根,位于 $(-\infty, 0)$ 中;当 $a = \frac{1}{4}e^2$ 时,原方程有两个实根,一个位于 $(-\infty, 0)$ 中,一个为 $x = 2$;当 $a > \frac{1}{4}e^2$ 时,原方程有三个实根,分别位于 $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ 与 $(2, +\infty)$ 中.

例 2.90(北京市2004年竞赛题)　已知方程 $\log_a x = x^b$ 存在实根,常数 $a > 1$, $b > 0$,求 a 和 b 应满足的条件.

解析　令 $f(x) = \log_a x - x^b (0 < x < +\infty)$,则 $f(0+) = -\infty, f(+\infty) = -\infty$,且

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln a} - bx^{b-1} = \frac{1 - bx^b \ln a}{x\ln a}$$

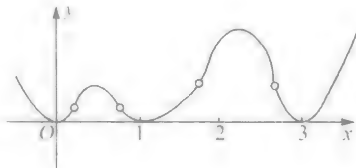
令 $f'(x) = 0$,得驻点 $x_0 = (b\ln a)^{-\frac{1}{b}}$. 当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$;当 $x_0 < x$ 时, $f'(x) < 0$. 所以 $0 < x < x_0$ 时, $f(x)$ 严格增加; $x > x_0$ 时, $f(x)$ 严格减少. 所以 $f(x_0)$ 为极大值. 因为原方程有实根,故 $f(x_0) \geqslant 0$,即

$$-\frac{\ln(b\ln a) + 1}{b\ln a} \geqslant 0 \Rightarrow \ln(b\ln a) \leqslant -1$$

由此可得 a, b 应满足 $b\ln a \leqslant \frac{1}{e}$.

例 2.91(江苏省1996年竞赛题)　设 $f(x) = x^2(x-1)^2(x-3)^2$,试问曲线 $y = f(x)$ 有几个拐点,证明你的结论.

解析　令 $u(x) = x(x-1)(x-3)$,则 $f(x) = u^2$,得 $f'(x) = 2u(x)u'(x)$,其中 $u'(x) = 3x^2 - 8x + 3$. 令 $u'(x) = 0$,解得 $x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$,所以 $f'(x)$ 有5个零点: $x = 0, \frac{4-\sqrt{7}}{3}, 1, \frac{4+\sqrt{7}}{3}, 3$. 应用罗尔定理,在 $f'(x)$ 的相邻零点之间必有 $f''(x)$ 的零点,所以 $f''(x)$ 至少有4个零点,但由于 $f''(x)$ 是4次多项式,故 $f''(x) = 0$ 最多有4个实根. 因此 $f''(x)$ 恰有4个零点,分别位于 $\left(0, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, 1\right)$, $\left(1, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, 3\right)$ 内.



由于 $f(x)$ 是多项式,它的一阶导数、二阶导数都是连续的. $x = 0, 1, 3$ 显见是 $f(x)$ 的极小值点. 由连续函数的最值定理, $f(x)$ 在 $[0,1]$, $[1,3]$ 内分别有最大值,且其最大值点应是 $f'(x)$ 的零点,所以 $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$, $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 由于 $f(x)$ 在极小值点 $x = 0, 1, 3$ 的附近是凹的,在极大值点 $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 的附近是凸的,所以 $f''(x)$ 的4个零点

左、右两侧的凹凸性改变,故 $f(x)$ 恰有1个拐点.由 $f(x)$ 的简图也可见此结论(如上图所示).

例 2.92(美国高校竞赛题) 设 $0<x_i<\pi(i=1,2,\cdots,n)$,令 $x=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,证明:$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$.

解析 由于 $0<x_i<\pi$,故 $0<x<\pi$,$\sin x<x$.令 $f(x)=\ln\frac{\sin x}{x}$,则

$$f'(x)=\cot x-\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{x^2}<0$$

故 $f(x)$ 的曲线是凸的,得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=f(x)$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\sin x_i}{x_i}=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\right)\leqslant\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

由于 $\ln x$ 是单调增加的,故有 $\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$.

例 2.93(莫斯科国民经济学院1975年竞赛题) 设 n 为大于1的奇数,求证:n 次实系数多项式最少有一个拐点.

解析 设 n 次多项式为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

这里 $n\geqslant 3$,且 n 为奇数,$a_n\neq 0$,则

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$

因 n 为奇数,$n\geqslant 3$,故 $n-2$ 为奇数,$n-2\geqslant 1$.不妨设 $a_n>0$,则 $f''(+\infty)=+\infty$,$f''(-\infty)=-\infty$,又 $f''(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,故 $f''(x)=0$ 至少有一个实根,记为 $x=c$;且实根 c 为奇数重根,记为 k 重($1\leqslant k\leqslant n-2$).于是

$$f''(x)=n(n-1)a_n(x-c)^k g(x)$$

其中 $g(x)$ 为 x 的 $(n-2-k)$ 次多项式,且 $g(c)\neq 0$.不妨设 $g(c)>0$,则在 $x=c$ 的左邻域内 $f''(x)<0$,在 $x=c$ 的右邻域内 $f''(x)>0$.由此可得 $x=c$ 是 $f(x)$ 的一个拐点.

例 2.94(莫斯科建筑工程学院1977年竞赛题) 设 $y=f(x)$ 有渐近线,且 $f''(x)>0$,求证:函数 $y=f(x)$ 的图象从上方趋近于此渐近线.

解析 由题意，此渐近线为水平渐近线或斜渐近线，设其方程为 $y=ax+b$. 令 $F(x)=f(x)-ax-b$，则

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0$$

(或极限过程改为 $x\to-\infty$)，且 $F''(x)=f''(x)>0$，因此 $F'(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上严格增.

$\forall\alpha\in(c,+\infty)$，若 $F'(\alpha)>0$，在 $[\alpha,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，必 $\exists\xi\in(\alpha,x)$，使得

$$F(x)=F(\alpha)+F'(\xi)(x-\alpha)>F(\alpha)+F'(\alpha)(x-\alpha)$$

令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，此与 $F(+\infty)=0$ 矛盾. 故 $\forall x\in(c,+\infty)$，有 $F'(x)\leqslant 0$. 因此 $F(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上单调减.

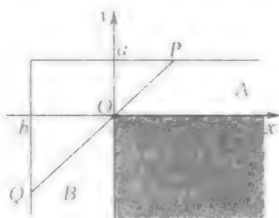
$\forall\beta\in(c,+\infty)$，若 $F(\beta)<0$，则 $x>\beta$ 时

$$F(x)\leqslant F(\beta)<0$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\leqslant F(\beta)<0$，此与 $F(+\infty)=0$ 矛盾. 若 $F(\beta)=0$，因 $F(+\infty)=0$，所以 $x>\beta$ 时，$F(x)\equiv 0$，因而 $x>\beta$ 时 $F'(x)=0$，此与 $F''(x)>0$ 矛盾. 故 $\forall x\in(c,+\infty)$，$F(x)>0$. 此表明 $f(x)>ax+b$，即 $y=f(x)$ 的图象从上方趋近于渐近线.

例 2.95(莫斯科矿业学院 1977 年竞赛题) 两条宽分别为 a 与 b 的走廊相交成直角，试求一个梯子能够水平地通过这两条走廊的最大长度.

解析 以走廊 A 与走廊 B 的交点为坐标原点，走廊 A 的一边为 x 轴，走廊 B 的一边为 y 轴建立直角坐标系(如图). 则走廊 A 的另一边的方程为 $y=a$，走廊 B 的另一边的方程为 $x=-b$.



过原点作直线 $y=kx\,(0<k<+\infty)$，设此直线与 $y=a$ 的交点为 P，与 $x=-b$ 的交点为 Q，则线段 PQ 的长度的最小值即为所求梯子的最大长度.

因为 P,Q 的坐标分别为 $P\left(\dfrac{a}{k},a\right)$，$Q(-b,-kb)$，所以 PQ 的长度 d 的平方为

$$l=d^2=\left(\frac{a}{k}+b\right)^2+(a+kb)^2$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}k}=-\frac{2a}{k^2}\left(\frac{a}{k}+b\right)+2b(a+kb)=2(a+kb)\left(b-\frac{a}{k^2}\right)$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}k}=0$，得 $k=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (因 $a+kb>0$)，且 $0<k<\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}k}<0$，$\sqrt{\dfrac{a}{b}}<k<+\infty$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}k}>0$，所以 l 在 $k=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时取极小值，而驻点 $k=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 是惟一的，所以 l 在 $k=$

$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ 时取最小值,其最小值为

$$
\begin{aligned}
l\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) &= (\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^3})^2+(\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{ab^2})^2 \\
&= \sqrt[3]{b^2}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2+\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2 \\
&= (\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3
\end{aligned}
$$

于是所求梯子的最大长度为

$$
\min d=\sqrt{l\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)}=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}
$$

2.2.8　不等式的证明(例 2.96—2.106)

例 2.96(莫斯科钢铁与合金学院 1977 年竞赛题)　求证不等式:

$$
\frac{e^b-e^a}{b-a}<\frac{e^b+e^a}{2}\quad (a\neq b)
$$

解析　不妨设 $a<b$. 令

$$
f(x)=(e^x+e^a)(x-a)-2(e^x-e^a)\quad (x\geqslant a)
$$

则 $f(a)=0$. 对 $f(x)$ 求导,并应用拉格朗日中值定理,得

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x-a)+(e^x+e^a)-2e^x=e^x(x-a)-(e^x-e^a) \\
&= e^x(x-a)-e^{\xi}(x-a)=(e^x-e^{\xi})(x-a)
\end{aligned}
$$

其中 $a<\xi<x$. 由于 $e^x>e^{\xi}$,所以 $f'(x)>0\Rightarrow x>a$ 时 $f(x)$ 严格增 $\Rightarrow f(x)>f(a)=0$,即当 $x>a$ 时

$$
(e^x+e^a)(x-a)>2(e^x-e^a)
$$

取 $x=b>a$,即得

$$
(e^b+e^a)(b-a)>2(e^b-e^a)
$$

此式等价于

$$
\frac{e^b-e^a}{b-a}<\frac{e^b+e^a}{2}
$$

例 2.97(莫斯科大学数力系 1977 年竞赛题)　求证不等式:

$$
\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}}\quad (x>0 \text{ 且 } x\neq 1)
$$

解析　(1) $0<x<1$ 时,原式 $\Leftrightarrow \ln x\geqslant\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$. 令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$,则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}}$$

令 $g(x)=2\sqrt{x}-x-1$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}>0\Rightarrow g(x)$ 严格增 $\Rightarrow g(x)<g(1)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 严格减，故 $f(x)>f(1)=0$，即 $\ln x\geqslant\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

(2) $x>1$ 时，原式 $\Leftrightarrow \ln x\leqslant\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$. 令 $f_1(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x$，则

$$f_1'(x)=\frac{1+x-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

令 $g_1(x)=1+x-2\sqrt{x}$，则 $g_1'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}>0\Rightarrow g_1(x)$ 严格增 $\Rightarrow g_1(x)>g(1)=0\Rightarrow f_1'(x)>0\Rightarrow f_1(x)$ 严格增，故 $f_1(x)>f_1(1)=0$，即 $\ln x\leqslant\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

由(1)和(2)，原式得证.

例 2.98(浙江省 2007 年竞赛题) 证明：

$$\cos\sqrt{2}x\leqslant -x^2+\sqrt{1+x^4},\quad x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)$$

解析 令 $f(x)=\cos\sqrt{2}x\cdot(\sqrt{1+x^4}+x^2)$，则

$$f'(x)=-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\cdot(\sqrt{1+x^4}+x^2)+2x\cos\sqrt{2}x\cdot\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}+1\right)$$

$$=\frac{x^2+\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}}(2x\cos\sqrt{2}x-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\cdot\sqrt{1+x^4})$$

进一步假设 $g(x)=2x\cos\sqrt{2}x-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\cdot\sqrt{1+x^4}$，则

$$g'(x)=2\cos\sqrt{2}x\cdot(1-\sqrt{1+x^4})-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\cdot\left(2x+\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}\right)$$

当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)$ 时 $g'(x)<0$，且 $g(0)=0$，故

$$g(x)<0,\quad x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)$$

由此，$f'(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}}g(x)<0$. 结合 $f(0)=1$，得

$$f(x) < 1,\quad x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)$$

即原不等式成立.

例 2.99(江苏省 2010 年竞赛题)　设 a 为正常数,使得 $x^2 \leqslant e^{ax}$ 对一切正数 x 成立,求常数 a 的最小值.

解析　根据题意,有

$$x^2 \leqslant e^{ax} \Leftrightarrow 2\ln x \leqslant ax \Leftrightarrow a \geqslant \frac{2\ln x}{x}$$

要求 a 的最小值,只要求 $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ 的最大值.

令 $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x^2} = 0$,得 $x = e$. 由于 $0 < x < e$ 时 $f'(x) > 0$,$x > e$ 时 $f'(x) < 0$,所以 $f(e) = \dfrac{2}{e}$ 为其最大值,故 a 的最小值为 $\dfrac{2}{e}$.

例 2.100(浙江省 2003 年竞赛题)　求使得不等式 $e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ 对所有正整数 n 都成立的最小的数 β.

解析　原不等式等价于 $\beta \geqslant \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} - n$. 令 $t = \dfrac{1}{n}$,则 $0 < t \leqslant 1$. 令 $f(t) = \dfrac{1}{\ln(1+t)} - \dfrac{1}{t}$,问题化为求 $f(t)$ 的最大值. 由于

$$f'(t) = \frac{-1}{(1+t)\ln^2(1+t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{(1+t)\ln^2(1+t) - t^2}{(1+t)t^2\ln^2(1+t)}$$

上式中分母是大于零的,下面来判别分子的符号. 令

$$g(t) = (1+t)\ln^2(1+t) - t^2 \quad (0 < t \leqslant 1)$$

则 $g'(t) = \ln^2(1+t) + 2\ln(1+t) - 2t$,$g''(t) = \dfrac{2(\ln(1+t) - t)}{1+t}$. 再令 $h(t) = \ln(1+t) - t$. 因为 $h'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t} < 0$,所以 $h(t)$ 严格减少,即 $h(t) < h(0) = 0$,因此 $g''(t) < 0$,推得 $g'(t)$ 严格减少,即 $g'(t) < g'(0) = 0$,又推得 $g(t)$ 严格减少,即 $g(t) < g(0) = 0$,因此

$$f'(t) = \frac{g(t)}{(1+t)t^2\ln^2(1+t)} < 0$$

故 $f(t)$ 严格减少,由此可得

$$\min\beta = \lim_{t\to0^+} f(t) = \lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{2t(1+t)} = \frac{1}{2}$$

例 2.101(江苏省 1994 年竞赛题)　试比较 π^e 与 e^π 的大小.

解析　令 $f(x) = e^x - x^e (x \geqslant e)$,则

$$f'(x) = e^x - ex^{e-1}$$
$$f''(x) = e^x - e(e-1)x^{e-2}$$
$$f'''(x) = e^x - e(e-1)(e-2)x^{e-3}$$

由于 $e-3<0$,故 x^{e-3} 单调减($x \geqslant e$),$-e(e-1)(e-2)x^{e-3}$ 单调增,e^x 也单调增,于是 $f'''(x)$ 在 $x \geqslant e$ 时单调增. $x \geqslant e$ 时

$$\begin{aligned} f'''(x) \geqslant f'''(e) &= e^e - e(e-1)(e-2)e^{e-3} \\ &= e^{e-2}(e^2 - e^2 + 3e - 2) \\ &= e^{e-2}(3e-2) > 0 \end{aligned}$$

故 $f''(x)$ 严格增. $x \geqslant e$ 时

$$f''(x) \geqslant f''(e) = e^e - e(e-1)e^{e-2} = e^{e-1} > 0$$

故 $f'(x)$ 严格增. $x > e$ 时

$$f'(x) > f'(e) = 0$$

故 $f(x)$ 严格增. $x > e$ 时,$f(x) > f(e) = 0$,取 $x = \pi$ 即得 $f(\pi) > 0$,即 $\pi^e < e^\pi$.

例 2.102(精选题)　设 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$上二阶可导,$f(0) = 1$,$f'(0) \leqslant 1$,$f''(x) < f(x)$,求证:$x > 0$ 时,$f(x) < e^x$.

解析　令 $F(x) = e^{-x} f(x)$,则

$$F'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$$

令 $G(x) = e^x(f'(x) - f(x))$,则

$$G'(x) = e^x(f''(x) - f(x)) < 0$$

$\Rightarrow G(x)$ 严格减 $\Rightarrow$

$$G(x) < G(0) = f'(0) - f(0) \leqslant 0$$

$\Rightarrow f'(x) - f(x) < 0 \Rightarrow$

$$F'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) < 0$$

$\Rightarrow F(x)$ 严格减 $\Rightarrow$

$$F(x) = e^{-x} f(x) < F(0) = 1$$

由此可得 $f(x) < e^x$.

例 2.103(江苏省 1991 年竞赛题)　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数,且

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \right| \leqslant |\sin x|, \quad \left| \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1} \sin jx \right| \leqslant |\sin x|$$

试证明：$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant\frac{2}{n+1}$.

解析　令 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，则

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=|f'(0)|$$
$$=|a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n|$$
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right|=1$$

所以

$$|a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n|\leqslant 1$$

令 $g(x)=a_1\sin nx+a_2\sin(n-1)x+\cdots+a_n\sin x$，则

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\right|=|g'(0)|$$
$$=|na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n|$$
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right|=1$$

所以

$$|na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n|\leqslant 1$$

综上，有

$$\begin{aligned}&|(1+n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)|\\=&|(a_1+na_1)+(2a_2+(n-1)a_2)+\cdots+(na_n+a_n)|\\\leqslant&|a_1+2a_2+\cdots+na_n|+|na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n|\\\leqslant&1+1=2\end{aligned}$$

于是 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant\frac{2}{1+n}$.

例 2.104（南京大学 1995 年竞赛题）　设在 $[0,2]$ 上定义的函数 $f(x)\in C^{(2)}$，且 $f(a)\geqslant f(a+b)$，$f''(x)\leqslant 0$，证明：对于 $0<a<b<a+b<2$，恒有

$$\frac{af(a)+bf(b)}{a+b}\geqslant f(a+b)$$

解析 分别在区间$[a,b]$和$[b,a+b]$上应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$和$\eta\in(b,a+b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$
$$f(a+b)-f(b)=f'(\eta)(a+b-b)=af'(\eta)$$

因为$f''(x)\leqslant 0$，所以$f'(x)$单调减，故$f'(\xi)\geqslant f'(\eta)$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant\frac{f(a+b)-f(b)}{a}$$

$$\Leftrightarrow\qquad a(f(b)-f(a))\geqslant(f(a+b)-f(b))(b-a)$$

$$\Leftrightarrow\qquad bf(b)+af(a)\geqslant bf(a+b)+af(a+b)+2a(f(a)-f(a+b))$$

因为$f(a)\geqslant f(a+b)$，故

$$bf(b)+af(a)\geqslant(a+b)f(a+b)$$

即

$$\frac{af(a)+bf(b)}{a+b}\geqslant f(a+b)$$

例 2.105（莫斯科国立师范学院 1977 年竞赛题） 求实数α的取值范围，使得不等式

$$x\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}y+\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}y^{1-\alpha}$$

对一切正数x与y成立.

解析 当$\alpha=1$时原式化为$x\leqslant x$，故$\alpha=1$满足条件. 当$\alpha\neq 1$时，令

$$f(y)=\frac{\alpha-1}{\alpha}y+\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}y^{1-\alpha}$$

则

$$f'(y)=\frac{\alpha-1}{\alpha}\left[1-\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\right]$$

若$0<\alpha<1$，则有

	$y<x$	$y=x$	$y>x$
$f'(y)$	$+$	0	$-$

所以$f(y)$在$y=x$时有极大值$f(x)=x$，于是$f(y)<x(y\neq x)$. 故$0<\alpha<1$时原不等式不成立. 若$\alpha<0$，则有

	$y<x$	$y=x$	$y>x$
$f'(y)$	$+$	0	$-$

所以$f(y)$在$y=x$时有极大值$f(x)=x$，于是$f(y)<x(y\neq x)$，故$\alpha<0$时原

不等式不成立. 若 $\alpha > 1$,则有

	$y < x$	$y = x$	$y > x$
$f'(y)$	$-$	0	$+$

所以 $f(y)$ 在 $y = x$ 时有极小值 $f(x) = x$. 于是 $\forall y \in \mathbf{R}$ 有 $f(y) \geqslant x$. 即 $\alpha > 1$ 时原不等式成立. 故所求的 α 的取值范围是$[1, +\infty)$.

例 2.106(北京市 1993 年竞赛题)　设 $y > x > 0$,求证: $y^{x^y} > x^{y^x}$.

解析　分四种情况证明.

(1) 当 $0 < x < y \leqslant 1$ 时,$\ln x < \ln y \leqslant 0$,则

$$y\ln x < y\ln y \leqslant x\ln y \Rightarrow 0 < x^y < y^x \Rightarrow y^x\ln x < y^x\ln y \leqslant x^y\ln y \Rightarrow x^{y^x} < y^{x^y}$$

(2) 当 $0 < x \leqslant 1 < y$ 时,$\ln x \leqslant 0 < \ln y$,则

$$y^x\ln x \leqslant 0 < x^y\ln y \Rightarrow x^{y^x} < y^{x^y}$$

(3) 当 $1 < x < y$ 且 $y^x \leqslant x^y$ 时,$0 < \ln x < \ln y$,则

$$y^x\ln x < y^x\ln y \leqslant x^y\ln y \Rightarrow x^{y^x} < y^{x^y}$$

(4) 当 $1 < x < y$ 且 $x^y < y^x$ 时,$0 < \ln x < \ln y$,$y\ln x < x\ln y$,且

$$x^y\ln y - y^x\ln x = x^{y-1}\cdot x\ln y - y^x\ln x > x^{y-1}\cdot y\ln x - y^x\ln x = (x^y y - y^x x)\frac{\ln x}{x}$$

$\forall x_0 > 1$,令 $f(y) = y\ln x_0 + \ln y - x_0\ln y - \ln x_0\,(y \geqslant x_0)$,则 $f(x_0) = 0$,且

$$f'(y) = \ln x_0 + \frac{1}{y} - \frac{x_0}{y},\quad f''(y) = \frac{x_0 - 1}{y^2} > 0$$

于是 $f'(y)$ 严格增加,$f'(y) \geqslant f'(x_0) = \ln x_0 + \frac{1}{x_0} - 1$. 令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1\,(x > 1)$,则 $g'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0$,所以 $g(x)$ 严格增加,$g(x_0) > g(1) = 0$. 于是 $f'(y) > 0$,$f(y)$ 严格增加,则 $f(y) \geqslant f(x_0) = 0$. 由 $x_0 > 1$ 的任意性,得 $y\ln x + \ln y - x\ln y - \ln x > 0$,即 $x^y y - y^x x > 0$,又 $\frac{\ln x}{x} > 0$,所以

$$x^y\ln y - y^x\ln x > 0 \Rightarrow y^{x^y} > x^{y^x}$$

练习题二

1. 设命题:若函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$,且 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(2x) - f(x)}{x} = a\,(a \in \mathbf{R})$,则

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=a$.

判断该命题是否成立. 若成立，给出证明；若不成立，举一反例并作出说明.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ( )

A. 不连续 B. 连续但不可导

C. 可导但导函数不连续 D. 可导且导函数连续

3. 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $2y=xy^3-1$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，则常数 a,b 的值分别为 ( )

A. $a=0,b=-2$ B. $a=1,b=-3$

C. $a=-3,b=1$ D. $a=-1,b=-1$

4. 设 $f(x)=\max\{3x,x^3\}$，$x\in(0,2)$，求 $f'(x)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+a^2), & x>1,\\ \sin(b(x-1)), & x\leqslant 1,\end{cases}$ 为使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，求 a,b 的值.

6. 设函数 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b\,(ab\neq 0)$，求 $f'(1)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

8. 求下列函数的导数：

(1) 已知 $f(x)=x\arcsin\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)$，求 $f'(0)$；

(2) 已知 $f(x)=\dfrac{1}{\tan^2 2x}$，求 $f'(x)$；

(3) 已知 $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^x$，求 $f'(x)$；

(4) 已知 $\arctan y=xe^y$，求 y'；

(5) 已知 $\arctan\dfrac{x-y}{x+y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 y'；

(6) 已知 $\begin{cases}x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\\ y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$；

(7) 已知 $f(x)=x\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{2x}{t}\right)^t$，求 $f'(x)$.

9. 已知

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)^2\cos\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$$

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$F(x)=f(g(x))$，求 $F'(1)$.

10. 设 $f(x)=x^2(2+|x|)$，求使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n.

11. 已知 $f(x)=x(2x+5)^2(3-x)^3$，求 $f^{(6)}(0)$.

12. 已知 $f(x)=\sin^2(3x)\cdot\cos(5x)$，求 $f^{(n)}(x)$.

13. 设 $f(x)$ 满足：$\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)=1$，求 $f(x)$.

14. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x-\frac{1}{3}x^3}{x^5}$.

15. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x(e^{2x}-1)\ln(1+\tan^2 x)}$.

16. 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，$0<a\leqslant b$，证明：$f(a+b)<f(a)+f(b)$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导，$f(0)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,x)$，使得

$$f(x)=(1+\xi)f'(\xi)\ln(1+x)$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$（ξ 与 η 不一定相等），使得

$$(b-a)e^{\eta}f'(\xi)=(e^b-e^a)f'(\eta)$$

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)$，$\forall x\in(a,b)$，$|f''(x)|\leqslant M$，证明：$\forall x\in(a,b)$，有

$$|f'(x)|\leqslant\frac{M}{2}(b-a)$$

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f''(\xi)+f'(\xi)=1$.

21. 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续，且 $f(3)=0$. 试证：在区间 $(2,4)$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t$.

22. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)>0$，$f'(0)<0$，且 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有一个零点.

23. 已知数列 $\{a_n\}$，其中 $a_n=(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})\sqrt{n}\ln n$，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，并证明：当 $n\geqslant 9$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调减少.

24. 证明下列不等式：

(1) $x\ln^2 x<(x-1)^2\quad(1<x<2)$；

(2) $\dfrac{x}{1+2x}<\ln\sqrt{1+2x}<x\quad(x>0)$.

25. 求下列曲线的渐近线：

(1) $y=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$；　　(2) $y=|x+2|e^{\frac{1}{x}}$.

专题 3　一元函数积分学

3.1　基本概念与内容提要

3.1.1　不定积分基本概念

1）原函数与不定积分

若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个**原函数**．若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的全体原函数为 $F(x)+C$（C 为任意常数）．$f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

2）不定积分的性质

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C,\qquad \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$$

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x),\qquad \mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$$

3.1.2　基本积分公式

$$\int x^{\lambda}\mathrm{d}x=\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}+C\quad(\lambda\neq 1),\qquad \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$$

$$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq 1),\qquad \int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$$

$$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C,\qquad \int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$$

$$\int\sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C,\qquad \int\csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$$

$$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C,\qquad \int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$$

$$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C,\qquad \int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad\left(\text{或}-\arccos\frac{x}{a}+C\right)\quad(a>0)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \quad \left(\text{或} -\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{x}{a}+C\right) \quad (a>0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a>0)$$

3.1.3　不定积分的计算

1）换元积分法

定理 1（第一换元积分法）　设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，函数 $\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x))+C$$

定理 2（第二换元积分法）　设 $x=\varphi(t)$ 严格单调且可导，若

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi^{-1}(x))+C$$

2）分部积分法

定理 3（分部积分法）　设 $u(x)$，$v(x)$ 皆可导，函数 $u'(x)v(x)$ 与 $u(x)v'(x)$ 中至少有一个有原函数，则

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

当被积函数是三角函数（或反三角函数）、指数函数、对数函数、幂函数中两个乘积形式时，通常采用分部积分公式计算.

3）简单的有理函数的积分

任一有理函数（又称有理分式，它是两个多项式的商）可分解为一个多项式（对于真分式此为零多项式）与若干个部分分式的和. 这些部分分式的形式为

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x \quad (n\in\mathbf{N}), \qquad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x \quad (p^2<4q, n\in\mathbf{N})$$

这两种形式的部分分式都是可用第一换元积分法积分的.

4）简单的无理函数的积分，选取适当的换元变换，采用第二换元积分法积分.

5）三角函数有理式的积分

第一种方法是采用换元积分法或分部积分法；第二种方法是采用万能变换，如

令 $\tan\frac{x}{2}=t$,则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$,$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$,代入被积表达式,原积分可化为有理函数的积分.

3.1.4 定积分基本概念

1) 定积分的定义

将区间$[a,b]$分割为 n 个小区间

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,$\lambda=\max\{\Delta x_i\}$,$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,则 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的**定积分**定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

这里右端的极限存在.

2) $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的必要条件是 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界. 当 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续时,$f(x)$ 在$[a,b]$上可积;当 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点时,$f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

3) 定积分的主要性质

定理 1(保向性) 若 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上可积,$\forall x\in[a,b]$有 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

定理 2(可加性) 当下列三个积分皆可积时,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

对于实数 a,b,c 的任意大小关系,上式皆成立.

3.1.5 定积分中值定理

定理(中值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

3.1.6 变限的定积分

定理 若 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)$,$\psi(x)$ 可导,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x\right)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x\right)=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$$

3.1.7　定积分的计算

1）定积分基本定理

定理 1（牛顿-莱布尼兹公式）　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

2）换元积分法

定理 2（换元积分公式）　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上连续，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$\varphi'(x)\neq 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

3）分部积分法

定理 3（分部积分公式）　设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，则

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

3.1.8　奇偶函数与周期函数定积分的性质

1）设 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数;}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数}\end{cases}$$

2）设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\quad (T>0,a\in\mathbf{R})$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\quad (a\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N})$$

3.1.9　定积分在几何与物理上的应用

1）平面图形的面积

（1）若平面图形 D 是由上、下两条曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$（$g(x)\leqslant f(x)$）与

直线 $x=a,x=b(a<b)$ 围成的，则 D 的面积为

$$S=\int_a^b(f(x)-g(x))\mathrm{d}x$$

（2）若平面图形 D 是由左、右两条曲线 $x=\varphi(y),x=\psi(y)(\varphi(y)\leqslant\psi(y))$ 与直线 $y=c,y=d(c<d)$ 围成的，则 D 的面积为

$$S=\int_c^d(\psi(y)-\varphi(y))\mathrm{d}y$$

（3）若平面图形 D 是极坐标下的两条曲线 $\rho=\rho_1(\theta),\rho=\rho_2(\theta)(\rho_1(\theta)\leqslant\rho_2(\theta))$ 与射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 围成的，则 D 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta))\mathrm{d}\theta$$

2）特殊立体的体积

（1）设立体 Ω 介于两平面 $x=a,x=b(a<b)$ 之间，$\forall x\in[a,b]$，过点 x 作平面垂直于 x 轴，该平面与立体 Ω 的截面的面积为可求的连续函数 $A(x)$，则立体 Ω 的体积为

$$V=\int_a^bA(x)\mathrm{d}x$$

（2）平面图形 $D:\{(x,y)\mid g(x)\leqslant y\leqslant f(x),a\leqslant x\leqslant b\}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x$$

（3）平面图形 $D:\{(x,y)\mid g(x)\leqslant y\leqslant f(x),a\leqslant x\leqslant b,a\geqslant0\}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^bx(f(x)-g(x))\mathrm{d}x$$

3）平面曲线的弧长

（1）平面曲线 Γ 的方程 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，若 $f(x)$ 连续可导，则曲线 Γ 的弧长为

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

（2）平面曲线 Γ 的参数方程为 $x=\varphi(t),y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，$\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 皆连续可导，则曲线 Γ 的弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

(3) 平面曲线 Γ 的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \rho(\theta)$ 连续可导，则曲线 Γ 的弧长为

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, \mathrm{d}\theta$$

4) 旋转曲面的面积

平面曲线 $y = f(x)(f(x) \geqslant 0, a \leqslant x \leqslant b)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

5) 定积分在物理上可用于求变力在直线运动下所作的功、液体的压力以及引力等，这些应用可用微元法解决.

3.1.10 反常积分

1) 两类反常积分的定义

(1) 若 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a, x]$ 上可积，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

若上式右端极限存在时，称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称为发散.

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = b$ 的左邻域内无界，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

若上式右端极限存在时，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称为发散. 称 $x = b$ 为奇点(或瑕点).

(3) 三个基本结论：反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，当且仅当 $p > 1$ 时收敛；反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(b - x)^\lambda}\mathrm{d}x$，当且仅当 $\lambda < 1$ 时收敛；反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x - a)^\lambda}\mathrm{d}x$，当且仅当 $\lambda < 1$ 时收敛.

2) 两类反常积分的计算

(1) **广义牛顿-莱布尼兹公式**：若 $x = +\infty$ 是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的惟一奇点，$F'(x) = f(x), x \in [a, +\infty)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

若 $x=b$ 是反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的惟一奇点，$F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{b-}=F(b-)-F(a)$$

若 $x=a$ 是反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的惟一奇点，$F'(x)=f(x)$，$x\in(a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{a+}^{b}=F(b)-F(a+)$$

(2) 广义换元积分法：若 $x=b$(b 可为 $+\infty$) 是反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的惟一奇点，令 $x=\varphi(t)$，$\varphi(t)$ 连续可导，且 $a=\varphi(\alpha)$，$\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$($\beta$ 可为 $+\infty$)，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

(3) 广义分部积分法：若 $x=b$(b 可为 $+\infty$) 是反常积分$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)$ 的惟一奇点，则

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^{b-}-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

3.2 竞赛题与精选题解析

3.2.1 求原函数(例 3.1—3.4)

例 3.1(莫斯科钢铁与合金学院 1976 年竞赛题) 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，$0<x<1$，试求函数 $f(x)$.

解析 由于 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$，$\tan^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$，令 $\sin^2 x=t$，则

$$f'(t)=1-2t+\frac{t}{1-t}=-2t-\frac{1}{t-1}$$

积分得

$$f(t)=-t^2-\ln|t-1|+C$$

由于 $0<x<1$，所以 $0<t<1$，于是

$$f(x)=-x^2-\ln(1-x)+C$$

例 3.2(南京大学 1993 年竞赛题) 已知定义于 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1],\\ x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

又 $f(0)=1$，则 $f(x)=$ ______.

解析　令 $\ln x=t$，则

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t, & t>0\end{cases}$$

积分得

$$f(t)=\begin{cases}t+C_1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t+C_2, & t>0\end{cases}$$

令 $t=0$，得 $f(0)=1=C_1=1+C_2$，故 $C_1=1, C_2=0$，于是

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -\infty<x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0\end{cases}$$

例 3.3（江苏省 1991 年竞赛题）　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义且可导，$g(0)=1$，又当 $x>0$ 时

$$f(x)+g(x)=3x+2,\quad f'(x)-g'(x)=1$$
$$f'(2x)-g'(-2x)=-12x^2+1$$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式.

解析　将 $f'(x)-g'(x)=1$ 两边积分得

$$f(x)-g(x)=x+C_1$$

由 $f(0)=g(0)=1$，可得 $C_1=0$，故 $f(x)-g(x)=x$.

将上式与 $f(x)+g(x)=3x+2$ 联立解得

$$f(x)=2x+1,\quad g(x)=x+1\quad (x\geqslant 0)$$

在 $f'(2x)-g'(-2x)=-12x^2+1$ 中令 $u=2x$ 得

$$f'(u)-g'(-u)=-3u^2+1$$

两边积分得

$$f(u)+g(-u)=-u^3+u+C_2$$

由 $f(0)=g(0)=1$，可得 $C_2=2$，所以

$$g(-u)=-u^3+u+2-f(u)=-u^3-u+1\quad (u\geqslant 0)$$

所以

$$g(x)=x^3+x+1\qquad (x<0)$$

例 3.4（莫斯科全苏大学生 1975 年竞赛题）　求满足下列条件的可微函数 $f(x)$：对

任意的 $x,y(x\neq y)$,有 $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(\alpha x+\beta y)$,这里 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,且 $\alpha+\beta=1$.

解析 令 $x=u-\beta v,y=u+\alpha v$,则 $y-x=v(v\neq 0),\alpha x+\beta y=u$,故有

$$f(y)-f(x)=f(u+\alpha v)-f(u-\beta v)=vf'(u)$$

对 v 求导两次得

$$\alpha^2 f''(u+\alpha v)=\beta^2 f''(u-\beta v)$$

即 $\alpha^2 f''(y)=\beta^2 f''(x)$,对一切 $x,y(x\neq y)$ 成立.

(1) 若 $\alpha\neq\beta$,则 $f''(x)=0$,积分得所求函数为

$$f(x)=C_1x+C_2$$

(2) 若 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$,则 $f''(x)=C_1$,积分得所求函数为

$$f(x)=\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

以上两式中,C_1,C_2,C_3 为任意常数.

3.2.2 求不定积分(例 3.5—3.18)

例 3.5(江苏省 1998 年竞赛题) 求 $\displaystyle\int|\ln x|\,\mathrm{d}x$.

解析 当 $x>1$ 时,应用分部积分法,有

$$\int|\ln x|\,\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C$$

当 $0<x<1$ 时,应用分部积分法,有

$$\int|\ln x|\,\mathrm{d}x=-\int\ln x\,\mathrm{d}x=-x(\ln x-1)+C_1$$

在两式中令 $x=1$ 得 $-1+C=1+C_1$,故 $C_1=C-2$. 于是

$$\int|\ln x|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}x(\ln x-1)+C, & x\geqslant 1,\\ x(1-\ln x)+C-2, & 0<x<1\end{cases}$$

例 3.6(北京市 1995 年竞赛题) 设 y 是由方程 $y^3(x+y)=x^3$ 所确定的隐函数. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{y^3}\mathrm{d}x$.

解析 令 $x=ty$,代入原方程有 $(1+t)y^4=t^3y^3$,从而

$$y=\frac{t^3}{1+t},x=\frac{t^4}{1+t}\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{t^3(3t+4)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

所以

$$\int \frac{1}{y^3}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+t)^3}{t^9} \cdot \frac{t^3(3t+4)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{3}{t^4} + \frac{7}{t^5} + \frac{4}{t^6}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\left(\frac{1}{t^3} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{t^4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{t^5}\right) + C$$

$$= -\left(\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{7}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \frac{4}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5\right) + C$$

例 3.7(浙江省 2009 年竞赛题)　求$\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2(\ln x-1)^2}}\mathrm{d}x$.

解析　因为$(x\ln x - x)' = \ln x$,令 $x(\ln x - 1) = t$,应用换元积分法,则

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2(\ln x-1)^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C$$

$$= \ln(x(\ln x - 1) + \sqrt{1+x^2(\ln x-1)^2}) + C$$

例 3.8(江苏省 2000 年竞赛题)　求$\int \frac{x^5 - x}{x^8+1}\mathrm{d}x$.

解析　令 $x^2 = t$,则

$$\int \frac{x(x^4-1)}{x^8+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{t^4+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}+\left(t+\frac{1}{t}\right)}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x^2 - x^4 - 1}{\sqrt{2}x^2 + x^4 + 1}\right| + C$$

例 3.9(南京大学 1995 年竞赛题)　求$\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$.

解析　因$(x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x(x+1)$,令 $x\mathrm{e}^x = t$,则

$$\int \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x(1+x)}{x\mathrm{e}^x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x\mathrm{e}^x}\right| + C$$

例 3.10(江苏省 2004 年竞赛题)　$\int \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{(x-\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x =$ ______.

解析　因为$\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)' = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$,所以

$$\text{原式}=\int\frac{e^x(x-1)}{x^2\left(1-\frac{e^x}{x}\right)^2}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}-1\right)^2}d\frac{e^x}{x}=-\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1}+C$$

$$=\frac{x}{x-e^x}+C$$

例 3.11（江苏省 2004 年竞赛题） $\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}dx=$ ________.

解析 因为$(x\tan x)'=x\sec^2 x+\tan x$，所以

$$\text{原式}=\int\frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}dx=\int\frac{1}{(x\tan x-1)^2}d(x\tan x)=\frac{-1}{x\tan x-1}+C$$

$$=\frac{1}{1-x\tan x}+C$$

例 3.12（全国大学生 2013 年决赛题） 计算不定积分$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx$.

解析 令 $x\ln(1+x^2)dx=dv$，则

$$v=\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left((1+x^2)\ln(1+x^2)-\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}((1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2)+C$$

应用分部积分法，有

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\arctan x\,d((1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}((1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2)\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}((1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2)\arctan x-\frac{1}{2}(x\ln(1+x^2)-3x+3\arctan x)+C$$

$$=\frac{1}{2}((1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3)\arctan x-\frac{1}{2}(x\ln(1+x^2)-3x)+C$$

注：本题先令 $x\arctan x dx=dv$，求出 v 后再对原式分部积分，也可计算.

例 3.13（解放军防化学院 1992 年竞赛题） 求$\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

解析 令$\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}=t$，有 $x=\ln(1+t^2)-\ln(1-t^2)$，则

$$\text{原式}=\int t\,d(\ln(1+t^2)-\ln(1-t^2))$$

$$=\int t\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t=2\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\arctan t\right)+C$$

$$=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1})-2\mathrm{antan}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}+C$$

例 3.14(北京市 1999 年竞赛题)　求 $\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x$.

解析　令 $\ln x=t$,有 $x=\mathrm{e}^t$,所以

$$原式=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t+\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}\frac{1}{t}$$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t+\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t}-\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{e}^t}{t}+C=\frac{x}{\ln x}+C$$

例 3.15(江苏省 2002 年竞赛题)　$\int\arcsin x\cdot\arccos x\mathrm{d}x=$ ______.

解析　分部积分,得

$$原式=x\arcsin x\cdot\arccos x-\int x\cdot\left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=x\arcsin x\cdot\arccos x+\int(\arccos x-\arcsin x)\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=x\arcsin x\cdot\arccos x+(\arccos x-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}$$

$$-\int\sqrt{1-x^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=x\arcsin x\cdot\arccos x+(\arccos x-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}+2x+C$$

例 3.16(江苏省 2006 年竞赛题)　求

$$\int\ln[(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}]\frac{1}{(x+a)(x+b)}\mathrm{d}x$$

解析　$原式=\int\left(\frac{\ln(x+a)}{x+b}+\frac{\ln(x+b)}{x+a}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\ln(x+a)\mathrm{d}\ln(x+b)+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}\mathrm{d}x$$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)-\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}\mathrm{d}x+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}\mathrm{d}x$$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)+C$$

例 3.17(南京大学 1996 年竞赛题)　已知 $f''(x)$ 连续,$f'(x)\neq 0$,求

$$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]\mathrm{d}x$$

解析 对被积函数的第二项分部积分，有

$$\int \frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}dx = \int \frac{f^2(x)}{[f'(x)]^3}df'(x) = -\frac{1}{2}\int f^2(x)d\frac{1}{[f'(x)]^2}$$
$$= -\frac{f^2(x)}{2[f'(x)]^2} + \int \frac{1}{2[f'(x)]^2}df^2(x)$$
$$= -\frac{f^2(x)}{2[f'(x)]^2} + \int \frac{f(x)}{f'(x)}dx$$

于是

$$\text{原式} = \int \frac{f(x)}{f'(x)}dx + \frac{f^2(x)}{2[f'(x)]^2} - \int \frac{f(x)}{f'(x)}dx = \frac{f^2(x)}{2[f'(x)]^2} + C$$

例 3.18(北京市 1990 年竞赛题) 计算$\displaystyle\int \frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx$.

解析 原式 $=\displaystyle\int \frac{8\sin x e^{-\sin x}}{(1-\sin x)^2}\cos x dx$，令 $\sin x - 1 = u$，则

$$\text{原式} = 8\int \frac{(u+1)e^{-(u+1)}}{u^2}du = \frac{8}{e}\left(\int \frac{e^{-u}}{u}du + \int \frac{e^{-u}}{u^2}du\right)$$
$$= \frac{8}{e}\left[\int \frac{e^{-u}}{u}du + \left(-\frac{e^{-u}}{u} - \int \frac{e^{-u}}{u}du\right)\right] = -8\cdot\frac{e^{-u-1}}{u} + C$$
$$= \frac{8e^{-\sin x}}{1-\sin x} + C$$

3.2.3 利用定积分的定义求极限(例 3.19—3.26)

例 3.19(浙江省 2007 年竞赛题) 设

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$$
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

求：(1) $\dfrac{u_{10}}{v_{10}}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

解析 $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3i-2} + \frac{1}{3i-1} - \frac{2}{3i}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3i-2} + \frac{1}{3i-1} + \frac{1}{3i} - \frac{3}{3i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3i-2} + \frac{1}{3i-1} + \frac{1}{3i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i+n}$$

(1) 由于 $v_n = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{n+i}$,所以$\frac{u_{10}}{v_{10}} = 1$.

(2) 由于 $u_n = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i+n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$,所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^2 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 3$$

例 3.20(南京大学 1995 年竞赛题)　求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

解析　化为定积分计算.有

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

例 3.21(江苏省 2006 年竞赛题)　已知 $f(x) = a^{x^3}$,求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$$

解析　化为定积分求极限.则

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\ln a \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} = \ln a \cdot \int_0^1 x^3\mathrm{d}x$$

$$= \ln a \cdot \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln a$$

例 3.22(莫斯科钢铁与合金学院 1976 年竞赛题)　求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right]$$

解析　令

$$x_n = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$$

用放缩法,即

$$\frac{n}{n+1}(2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2^{\frac{n}{n}})\frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant (2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2^{\frac{n}{n}})\frac{1}{n}$$

由定积分的定义,有

$$\lim_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{\ln 2}$.

例 3.23(南京大学 1996 年竞赛题)　已知

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}, & x\neq 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right], & x=0\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解析　当 $x\neq 0$ 时,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}=0$,记 $t=\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}$,则应用重要极限公式可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{-n(2nx+x^2)}{2n^2}}=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{-n(2nx+x^2)}{2n^2}\right)=e^{-x}$$

当 $x=0$ 时,应用定积分求极限,有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}2\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]\\&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n}=2\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{-2}{1+x}\Big|_0^1=1\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

故

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=-1$$

例 3.24(江苏省 1996 年竞赛题)　设

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2x}{n}+\cdots+\cos\dfrac{n-1}{n}x\right), & x>0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{n!}\left(\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}\,\mathrm{d}x\right)^n\right], & x=0,\\ f(-x), & x<0\end{cases}$$

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性;

(2) 求函数 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的最大值.

解析　(1) 当 $x>0$ 时

$$f(x)=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k}{n}x\right)\cdot\frac{x}{n}\right]=\frac{1}{x}\int_0^x\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{x}\sin x\Big|_0^x=\frac{\sin x}{x}$$

当 $x=0$ 时

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}\,\mathrm{d}x\right)^n\right]$$

记$\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}\,\mathrm{d}x=a$，显然$1<a<\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{n!}<\frac{a^n}{n!}<\frac{(\sqrt{3})^n}{n!}$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$，又 $n>3$ 时

$$0<\frac{(\sqrt{3})^n}{n!}=\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{3}}{n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{n}<\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{n}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2n}\to0\quad(n\to\infty)$$

应用夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3})^n}{n!}=0$，再应用夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}\,\mathrm{d}x\right)^n=0$$

所以 $f(0)=1$. 当 $x<0$ 时 $f(x)=f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$. 故

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

(2) $0<x\leqslant\pi$ 时，$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $g(x)=x\cos x-\sin x$，则 $g'(x)=-x\sin x\leqslant0$，且仅当 $x=\pi$ 时 $g'(x)=0$，所以 $g(x)$ 严格减，$g(x)<g(0)=0$，所以 $f'(x)<0$，$f(x)$ 严格减. 而 $f(x)$ 为偶函数，故 $-\pi\leqslant x<0$ 时 $f(x)$ 严格增. 因此 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的最大值为 $f(0)=1$.

例 3.25(全国大学生 2014 年预赛题)　已知 $A_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.

解析　令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$x_0=0$，$x_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}, \\ \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_i))\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$，在$[x,x_i]$上应用拉格朗日中值定理，存在$\xi_i\in(x,x_i)$，使得

$$f(x)-f(x_i) = f'(\xi_i)(x-x_i)$$

于是

$$J_n = n\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_i))\mathrm{d}x = n\cdot\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[-f'(\xi_i)(x_i-x)]\mathrm{d}x$$

因$-f'(x)\in C[x_{i-1},x_i]$，应用最值定理，存在$m_i,M_i\in\mathbf{R}$，使$m_i\leqslant -f'(x)\leqslant M_i$，其中$x\in[x_{i-1},x_i]$. 于是

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}[-f'(\xi_i)(x_i-x)]\mathrm{d}x \geqslant m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\mathrm{d}x = \frac{m_i}{2n^2}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}[-f'(\xi_i)(x_i-x)]\mathrm{d}x \leqslant M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\mathrm{d}x = \frac{M_i}{2n^2}$$

即$m_i\leqslant 2n^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}[-f'(\xi_i)(x_i-x)]\mathrm{d}x\leqslant M_i$，应用介值定理，存在$\zeta_i\in(x_{i-1},x_i)$，使得

$$-f'(\zeta_i) = 2n^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}[-f'(\xi_i)(x_i-x)]\mathrm{d}x$$

即

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}[-f'(\xi_i)(x_i-x)]\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n^2}f'(\zeta_i)$$

因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-f'(\zeta_i)\cdot\frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1[-f'(x)]\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}f(x)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

例 3.26(北京市1997年竞赛题)　设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上具有连续导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right] = \frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

解析　n 等分区间$[a,b]$，分点分别为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$；记 $h=\dfrac{b-a}{n}$，则 $x_k=a+kh\,(k=1,\cdots,n)$. 因此，上式

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} hf(x_k)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x)-f(x_k))\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\cdot(x-x_k)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\cdot\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\mathrm{d}x \quad (\text{积分中值定理}) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left(-\frac{1}{2}\right)(x_k-x_{k-1})^2 \quad (\text{拉格朗日中值定理}) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(b-a)\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\cdot h = -\frac{1}{2}(b-a)\cdot\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)] = \text{右边}
\end{aligned}$$

其中 $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$，$\eta_k\in(\xi_k,x_k)$.

3.2.4　应用积分中值定理解题(例 3.27—3.29)

例 3.27(北京市1993年竞赛题)　设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且非负，M 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\mathrm{d}x}=M$.

解析　设 $f(\xi)=M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$，$\xi\in[a,b]$.

(1) 若 $\xi\in(a,b)$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$\left[\xi-\dfrac{1}{n},\xi+\dfrac{1}{n}\right]\subset[a,b]$. 应用积分中值定理，存在 $\xi_n\in\left[\xi-\dfrac{1}{n},\xi+\dfrac{1}{n}\right]$，使

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{1/n} f(\xi_n) = \sqrt[n]{\int_{\xi-\frac{1}{n}}^{\xi+\frac{1}{n}}[f(x)]^n\mathrm{d}x} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n\mathrm{d}x} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}$$

由于 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}}=1$$

运用夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x}=M$.

(2) 当 $\xi=a$ 或 $\xi=b$ 时证明是类似的，这里从略.

例 3.28（莫斯科民族友谊大学 1977 年竞赛题） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对一切 $\alpha,\beta(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$，有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\,|\beta-\alpha|^{1+\delta}$$

其中 M,δ 为正常数. 求证：$f(x)\equiv 0,x\in[a,b]$.

解析 $\forall x_0\in[a,b]$，应用积分中值定理，有

$$\int_{x_0}^{x_0+h}f(x)\mathrm{d}x=f(x_0+\theta h)h$$

这里 $x_0+h\in[a,b],h\neq 0,0<\theta<1$，所以

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h}f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_0+\theta h)h|\leqslant M\,|h|^{1+\delta}$$

$$|f(x_0+\theta h)|\leqslant M\,|h|^{\delta}$$

由于 $M>0,\delta>0,\lim\limits_{h\to 0}M\,|h|^{\delta}=0$，且 $f(x)$ 在 x_0 处连续，得

$$\lim_{h\to 0}|f(x_0+\theta h)|=0,\quad \lim_{h\to 0}f(x_0+\theta h)=f(x_0)=0$$

由 $x_0\in[a,b]$ 的任意性得 $f(x)\equiv 0,x\in[a,b]$.

例 3.29（莫斯科电气学院 1977 年竞赛题） 设 $\varphi_i(x)\in C[a,b]$，其中 $i=1,2,3,\cdots$，且 $\int_a^b\varphi_i^2(x)\mathrm{d}x=1$，求证：$\exists N\in\mathbf{N}$ 及常数 $c_i(i=1,2,\cdots,N)$，使得

$$\sum_{i=1}^N c_i^2=1,\quad \max_{x\in[a,b]}\left\{\left|\sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(x)\right|\right\}>100$$

解析 取 $N\in\mathbf{N}$，且 $N>10000(b-a)$，则

$$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^N\varphi_i^2(x)\right)\mathrm{d}x=N \tag{1}$$

应用积分中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^N\varphi_i^2(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^N\varphi_i^2(\xi)\cdot(b-a) \tag{2}$$

取

$$c_i = \frac{\varphi_i(\xi)}{\sqrt{\varphi_1^2(\xi) + \varphi_2^2(\xi) + \cdots + \varphi_N^2(\xi)}} \quad (i = 1,2,\cdots,N)$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i^2 = 1$. 且由(1),(2) 两式可得

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2(\xi)} = \sqrt{\frac{N}{b-a}} > \sqrt{10000} = 100$$

于是

$$\max_{x \in [a,b]} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(x) \right| \right\} > 100$$

3.2.5　变限的定积分的应用(例 3.30—3.44)

例 3.30(江苏省 1996 年竞赛题)　若 $a > 0$ 时,有

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x - \sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\tan 3x\right]$$

则 $a =$ ________.

解析　上式左端应用洛必达法则求极限,有

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x - \sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1-\cos x)\sqrt{a+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

原式右端应用洛必达法则求极限,有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\tan 3x\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\pi}{6} - x}{\cos 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{-1}{-3\sin 3x} = \frac{1}{3}$$

所以 $\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{3}$,故 $a = 36$.

例 3.31(江苏省 2000 年竞赛题)　当 $x \to 0$ 时,$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)\mathrm{d}t$ 的导数与 x^2 为等价无穷小,求 $f'(0)$.

解析　因为

$$F(x) = x^2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t^2 f'(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$F'(x) = 2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t + x^2 f'(x) - x^2 f'(x) = 2x(f(x) - f(0))$$

因为 $F'(x)$ 与 x^2 为等价无穷小，所以 $2(f(x)-f(0))$ 与 x 为等价无穷小，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(f(x)-f(0))}{x}=2f'(0)=1$$

所以 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

例 3.32（江苏省 2000 年竞赛题）　设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

解析　应用洛必达法则与变上限积分求导公式，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{\dfrac{3[f(x)-f(0)]}{x}+f'(x)}\\&=\frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}=1\end{aligned}$$

例 3.33（上海市 1991 年竞赛题）　设函数 $f(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$.

解析　根据题意可知 $f(x)$ 是周期为 1 的周期函数，且 $f(x)\geqslant 0$，当 $0\leqslant x<1$ 时有 $f(x)=x$. 设 $n\leqslant x<n+1$，则 $x\to+\infty$ 时 $n\to\infty$，且

$$\begin{aligned}\frac{n}{2(n+1)}&=\frac{n}{n+1}\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}(n+1)\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

应用夹逼准则，原式 $=\dfrac{1}{2}$.

例 3.34（江苏省 2006 年竞赛题）　$\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1\dfrac{1}{x^5}(\mathrm{e}^{-(tx)^2}-1)\mathrm{d}t=$ ________.

解析　令 $tx=u$ 将定积分换元，再应用洛必达法则，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\mathrm{e}^{-u^2}-1)\mathrm{d}u}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\mathrm{e}^{-x^4}-1)}{6x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^4}-1}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4}{3x^4}=-\frac{1}{3}$$

例 3.35(全国大学生 2009 年预赛题)　设 $f(x)$ 是连续函数,又

$$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t,\quad 且\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\quad (A\ 为常数)$$

求 $g'(x)$,并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解析　首先由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 可得 $f(0)=0$, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=A$.

当 $x\neq 0$ 时,令 $xt=u$,则

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

求导数得

$$g'(x)=\frac{f(x)x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

当 $x=0$ 时,利用导数的定义与洛必达法则,可得

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=A-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 3.36(南京大学 1995 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\sin t+x}}$.

解析　应用积分的保向性,有

$$\varphi(x)=\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t+\sin t+x}}\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x-1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\varphi(x)=\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t+\sin t+x}}\mathrm{d}t\geqslant\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{x+1+1+x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2x+2}}$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{2x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

应用夹逼准则得

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 3.37(江苏省 2000 年竞赛题)　设

$$f(x)=x,\quad g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

求 $F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.

解析　先用变量代换化简定积分,即令 $x-t=u$,则

$$F(x)=-\int_x^0 f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-u)g(u)\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}\int_0^x(x-u)\sin u\mathrm{d}u, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-u)\sin u\mathrm{d}u, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(-x\cos u+(u\cos u-\sin u))\Big|_0^x=x-\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ (-x\cos u+(u\cos u-\sin u))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=x-1, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

例 3.38(江苏省 1998 年竞赛题)　已知 $g(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,且 $g(0)=1$, $f(x)=\int_0^{2x}|x-t|g(t)\mathrm{d}t$.求 $f'(T)$.

解析　因为

$$f(x)=\int_0^x(x-t)g(t)\mathrm{d}t+\int_x^{2x}(t-x)g(t)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t+\int_x^{2x}tg(t)\mathrm{d}t-x\int_x^{2x}g(t)\mathrm{d}t$$

$$f'(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+xg(x)-xg(x)+4xg(2x)-xg(x)$$

$$-\int_x^{2x}g(t)\mathrm{d}t-2xg(2x)+xg(x)$$

$$=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\int_x^{2x}g(t)\mathrm{d}t+2xg(2x)$$

所以

$$f'(T)=\int_0^T g(t)dt-\int_T^{2T} g(t)dt+2Tg(2T)$$

因 $g(t)$ 以 T 为周期，故 $\int_0^T g(t)dt=\int_T^{2T} g(t)dt$，$g(2T)=g(0)=1$，得 $f'(T)=2T$.

例 3.39（浙江省 2002 年竞赛题）　设 $f(x)$ 连续，且当 $x>-1$ 时有

$$f(x)\left(\int_0^x f(t)dt+1\right)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$$

求 $f(x)$.

解析　令 $y(x)=\int_0^x f(t)dt+1$，则 $y(0)=1$，且 $y'(x)=f(x)$，于是有

$$2y'(x)y(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

两边积分得

$$\int 2y'(x)y(x)dx=\int 2y(x)dy(x)=y^2(x)$$

$$=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=-\int xe^x d\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}e^x(1+x)dx=\frac{e^x}{1+x}+C$$

由 $y(0)=1$ 可得 $C=0$，所以 $y(x)=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$，即

$$\int_0^x f(t)dt+1=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$$

于是

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}\right)'=\frac{\sqrt{e^x}\cdot x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

例 3.40（江苏省 2008 年竞赛题）　已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（$a>0$），且 $\int_a^b f(x)dx=0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^{\xi} f(x)dx=\xi f(\xi)$.

解析　令 $F(x)=\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F(a)=0$，$F(b)=0$，应用罗尔定理可知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，而 $F'(x)=\frac{xf(x)-\int_a^x f(t)dt}{x^2}$，故

$$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t = \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = \xi f(\xi)$$

例 3.41(江苏省 2006 年竞赛题) 设 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$ 上是导数连续的函数,$f(0)=0$,$|f(x)-f'(x)|\leqslant 1$,求证:$|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^x-1, x\in[0,+\infty)$.

解析 **方法 1** $\forall x>0$,因为

$$[\mathrm{e}^{-x}f(x)]' = \mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))$$

两边从 0 到 x 积分得

$$\int_0^x [\mathrm{e}^{-x}f(x)]'\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{-x}|f(x)| \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-x}|f'(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-x}$$

即 $|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^x-1$.

方法 2 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)+1)$,则

$$F'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x)-1)$$

由于 $|f(x)-f'(x)|\leqslant 1$,所以 $f'(x)-f(x)-1\leqslant 0$,于是$F'(x)\leqslant 0$,即 $F(x)$ 在区间$[0,+\infty)$ 上单调减,因此

$$F(x)\leqslant F(0)=f(0)+1=1$$

即

$$\mathrm{e}^{-x}(f(x)+1)\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\leqslant \mathrm{e}^x-1$$

令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-f(x))$,则

$$G'(x)=\mathrm{e}^{-x}(-f'(x)-1+f(x))$$

由于 $|f(x)-f'(x)|\leqslant 1$,所以 $-f'(x)+f(x)-1\leqslant 0$,于是$G'(x)\leqslant 0$,即 $G(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调减,因此

$$G(x)\leqslant G(0)=1-f(0)=1$$

即

$$\mathrm{e}^{-x}(1-f(x))\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\geqslant -(\mathrm{e}^x-1)$$

于是,$\forall x\geqslant 0$,有 $|f(x)|\leqslant \mathrm{e}^x-1$.

例 3.42(莫斯科大学 1977 年竞赛题) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$$

求证:$f(x)$ 在(a,b) 内至少有 3 个零点.

解析 因 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(a)=F(b)=0$,且 $F'(x)=f(x)$,应用积分中值定理,$\exists c\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = -F(c)(b-a) = 0$$

所以 $F(c)=0$. 对 $F(x)$ 在$[a,c]$与$[c,b]$上分别应用罗尔定理, $\exists c_1 \in (a,c)$, $\exists c_2 \in (c,b)$,使得

$$F'(c_1) = f(c_1) = 0,\quad F'(c_2) = f(c_2) = 0$$

即 $f(x)$ 在(a,b)内至少有两个零点.

假设 $f(x)$ 在(a,b)内恰有两个零点 $c_1,c_2(a<c_1<c_2<b)$,则 $f(x)$ 取值的符号有下列六种情况:

情况	函数	(a,c_1)	c_1	(c_1,c_2)	c_2	(c_2,d)
1	$f(x)$	+	0	−	0	+
2		+	0	+	0	−
3		+	0	−	0	−
4		−	0	+	0	−
5		−	0	−	0	+
6		−	0	+	0	+

下面证明这六种情况皆不可能发生. 情况 1:取多项式 $p(x)=(x-c_1)(x-c_2)$;情况 2:取多项式 $p(x)=c_2-x$;情况 3:取多项式 $p(x)=c_1-x$;情况 4:取多项式 $p(x)=(x-c_1)(c_2-x)$;情况 5:取多项式 $p(x)=x-c_2$;情况 6:取多项式 $p(x)=x-c_1$. 这里多项式为一次或二次多项式,由题意得

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$$

另一方面,由于这些多项式在区间(a,c_1),(c_1,c_2),(c_2,b)内的取值符号与 $f(x)$ 在这些区间上的取值符号完全相同,于是在(a,c_1),(c_1,c_2),(c_2,b)内 $p(x)f(x)$ 皆取正值,且 $p(x)f(x)$ 在$[a,b]$上连续,所以

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x > 0$$

从而导出了矛盾. 所以 $f(x)$ 在(a,b)内至少有 3 个零点.

例 3.43(莫斯科全苏大学生 1976 年竞赛题)　设函数 $f(x)$ 单调增, $\forall T>0$, $f(x)$ 在$[0,T]$上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = A$,求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

解析　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = A$,可得 $0<\varepsilon<1$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+\varepsilon)x}\int_0^{(1+\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t = A,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\varepsilon)x}\int_0^{(1-\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t = A$$

利用极限性质可得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = Ax + o(x)$$

$$\int_0^{(1+\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t = A(1+\varepsilon)x + o(x)$$

$$\int_0^{(1-\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t = A(1-\varepsilon)x + o(x)$$

由于 $f(x)$ 单调增，所以

$$\frac{1}{\varepsilon x}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon x}\int_{x}^{(1+\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t \tag{*}$$

又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\int_{x}^{(1+\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\left[\int_0^{(1+\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x}[A(1+\varepsilon)x - Ax + o(x)] = A$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{(1-\varepsilon)x} f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x}[Ax - A(1-\varepsilon)x + o(x)] = A$$

对(*)式应用夹逼准则，得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

例 3.44(北京市 1992 年竞赛题)　设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x) > 0$，$f(0) = f'(0) = 0$，试求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，其中 $u(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点$(x, f(x))$处的切线在 x 轴上的截距.

解析　曲线 $y = f(x)$ 在点$(x, f(x))$处切线为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

令 $Y = 0$，得 $X = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$，即 $u(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$，$u'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

应用 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的马克劳林公式，有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$$

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x) = f''(0)x + o(x)$$

因此 $u(x) = x - \dfrac{\frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)}{f''(0)x + o(x)}$，且当 $x\to0$ 时，有

$$\frac{u(x)}{\frac{x}{2}}=2-\frac{f''(0)x+o(x)}{f''(0)x+o(x)}\to 1$$

故 $u(x)=\frac{x}{2}+o(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0+}u(x)=0$.

因此

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(u(x))\cdot u'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(u(x))}{[f'(x)]^2}\cdot f''(x)$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}f''(0)u^2(x)+o(u^2(x))}{[f''(0)x+o(x)]^2}\cdot f''(0)$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}f''(0)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)}{[f''(0)x+o(x)]^2}\cdot f''(0)=\frac{1}{8}$$

3.2.6　定积分的计算(例 3.45—3.63)

例 3.45(江苏省 1998 年竞赛题)　设连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x+x^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+x^3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$$

求 $f(x)$.

解析　设 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$B=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=x+Ax^2+Bx^3$，所以

$$A=\int_0^1(x+Ax^2+Bx^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}A+\frac{1}{4}B$$

$$B=\int_0^2(x+Ax^2+Bx^3)\mathrm{d}x=2+\frac{8}{3}A+4B$$

由上述两式解出 $A=\frac{3}{8}$，$B=-1$，于是 $f(x)=x+\frac{3}{8}x^2-x^3$.

例 3.46(江苏省 2008 年竞赛题)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^4 x\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿＿＿.

解析　原式 $=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^2\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^2\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{48}(\sin 2x)^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{32}\pi$$

例 3.47(江苏省 2000 年竞赛题) 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & x<0\end{cases}$$

求$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解析 令 $x-1=t$,则

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^0\frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}\mathrm{d}t+\ln(1+x)\Big|_0^1\\&=1-\ln(1+e^t)\Big|_{-1}^0+\ln 2\\&=1-\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)+\ln 2\\&=1+\ln\frac{1+e}{e}=\ln(1+e)\end{aligned}$$

例 3.48(南京大学 1993 年竞赛题) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$ ______.

解析 分部积分,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\ln 2\end{aligned}$$

例 3.49(南京大学 1995 年竞赛题) $\int_0^{\sqrt[2n]{3}}\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x=$ ______.

解析 作换元变换,令 $x^n=\tan t$,则

$$nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t,\quad x^{3n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}(x^n)^2nx^{n-1}\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 t}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2n}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\end{aligned}$$

例 3.50(江苏省 2006 年竞赛题) 求$\int_0^1\frac{\arctan x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解析　原式 $=-\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}\frac{1}{1+x}=-\frac{\arctan x}{1+x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\pi}{8}+\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

令 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$，可解得 $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}$，则

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan x\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}$$

故原式 $=\frac{1}{4}\ln 2$.

例 3.51（江苏省 2006 年竞赛题）　$\int_0^1\frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=$ ______.

解析　令 $\arctan x=t$，作换元变换，则

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\sec^4 t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}t(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\left(t\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{64}\pi^2+\frac{1}{16}\pi+\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$$

例 3.52（江苏省 1994 年竞赛题）　已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

解析　因为

$$f'(x)=2x\cdot\frac{\sin(x^2)}{x^2}=\frac{2\sin(x^2)}{x}$$

应用分部积分法得（因 $f(1)=0$）

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left[x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cos 1-\frac{1}{2}$$

例 3.53（江苏省 1996 年竞赛题）　设 $f(t)=\int_1^t e^{-x^2}\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

解析　因为 $f'(t)=e^{-t^2}$，$f(1)=0$，分部积分得

$$\int_0^1 t^2f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t^3=\frac{1}{3}\left[t^3f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 t^3f'(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3e^{-t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{令 t^2=x}-\frac{1}{6}\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^1 x\mathrm{d}e^{-x}$$

$$=\frac{1}{6}\left(xe^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{e}+e^{-x}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{3e}-\frac{1}{6}$$

例 3.54(江苏省2016年竞赛题)　设函数 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$，试求定积分

$$\int_0^1 xf(x)dx$$

解析　**方法 1**　根据题意，可得 $f'(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$，再应用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)dx&=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx\\&=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\\&=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\\&=f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx\\&=f(1)-\frac{1}{2}\left(x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx\right)\\&=f(1)-\frac{1}{2}\left(\ln2-1+\ln(1+x)\Big|_0^1\right)=f(1)-\ln2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

下面来求 $f(1)$. 令 $\frac{1+t}{2}=\frac{1}{1+x}$，则 $dt=-\frac{2}{(1+x)^2}dx$，$\frac{1}{1+t^2}=\frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$，得

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{\ln2+\ln\frac{1+t}{2}}{1+t^2}dt=\ln2\cdot\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\\&=\ln2\cdot\arctan t\Big|_0^1-f(1)=\frac{\pi}{4}\ln2-f(1)\end{aligned}$$

于是 $f(1)=\frac{\pi}{8}\ln2$，故

$$\text{原式}=\frac{\pi}{8}\ln2-\ln2+\frac{1}{2}$$

方法 2　先将原积分化为二次积分，再交换二次积分的次序，得

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)dx&=\int_0^1dx\int_0^x x\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt=\int_0^1dt\int_t^1 x\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t^2)\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+t)dt+\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

$$
=-\frac{1}{2}\left(t\ln(1+t)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t\right)+f(1)
$$

$$
=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}(t-\ln(1+t))\Big|_0^1+f(1)=f(1)-\ln 2+\frac{1}{2}
$$

$f(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2$ 的求法同方法 1，故

$$
原式=\frac{\pi}{8}\ln 2-\ln 2+\frac{1}{2}
$$

例 3.55（江苏省 2002 年竞赛题）　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.

解析　原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$$
=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x
$$

$$
=2\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}
$$

例 3.56（江苏省 2002 年竞赛题）　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解析　原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$

$$
=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x
$$

$$
=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x
$$

$$
=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}
$$

例 3.57（江苏省 2016 年竞赛题）　求定积分 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解析　**方法 1**　根据题意，有

$$
原式=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x
$$

在第二项中令 $x=\pi-t$，则

$$
\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{(\pi-t)\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t
$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx - \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$$

于是

$$\begin{aligned}
原式 &= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx \\
&= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{-1-\cos^2 x+2}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi^2}{2} + 2\pi\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + 2\pi\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\tan^2 x}d\tan x \quad (令\ \tan x = u) \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+u^2}du \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \sqrt{2}\pi\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi^2
\end{aligned}$$

方法 2 记原式为 I,再令 $x=\pi-t$,则

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin^2 t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin^2 t}{1+\cos^2 t}dt \\
&= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx - I
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{-1-\cos^2 x+2}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi^2}{2} + \pi\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \pi\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\tan^2 x}d\tan x + \pi\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2+\tan^2 x}d\tan x \quad (令\ \tan x = u) \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \pi\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+u^2}du + \pi\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2+u^2}du \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi^2
\end{aligned}$$

例 3.58(北京市 2000 年、浙江省 2002 年竞赛题) 求积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

解析 应用定积分分部积分公式,有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} x \mathrm{d}e^{x+\frac{1}{x}} \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \mathrm{d}x + x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

例 3.59（全国大学生2014年预赛题）　求 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| \mathrm{d}x, n \in \mathbf{N}.$

解析　由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) = \sin(\ln x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$，应用定积分换元法和周期函数的定积分性质，有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{e^{-2n\pi}}^{1} |\sin(\ln x)| \mathrm{d}\ln x = \int_{-2n\pi}^{0} |\sin u| \mathrm{d}u \\
&= 2n \int_{0}^{\pi} \sin u \mathrm{d}u = -2n \cos u \Big|_{0}^{\pi} = 4n
\end{aligned}
$$

例 3.60（浙江省2004年竞赛题）　计算 $\int_{0}^{\pi} \frac{\pi + \cos x}{x^2 - \pi x + 2004} \mathrm{d}x.$

解析　令 $x = \frac{\pi}{2} + t$，则运用基本积分公式与奇函数的定积分性质，有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - \sin t}{t^2 + 2004 - \frac{\pi^2}{4}} \mathrm{d}t \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2 + 2004 - \frac{\pi^2}{4}} \mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^2 + 2004 - \frac{\pi^2}{4}} \mathrm{d}t \\
&= 2\pi \frac{1}{\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}} \Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - 0 \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}} \arctan \frac{\pi}{2\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}}
\end{aligned}
$$

例 3.61（江苏省2000年竞赛题）　设可微函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上有定义，其反函数为 $g(x)$ 且满足 $\int_{1}^{f(x)} g(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8)$，试求 $f(x)$.

解析　在原式中令 $f(x) = 1$ 得 $x^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$，解得 $x = 4$，即 $f(4) = 1$. 设 $t = f(x)$，反函数为 $x = f^{-1}(t)$，故 $g(t) = f^{-1}(t)$，则

$$\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = \int_1^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = \int_1^x x\mathrm{d}f(x) \quad (f(4)=1)$$

$$= xf(x)\Big|_1^x - \int_1^x f(x)\mathrm{d}x = xf(x) - 4 - \int_1^x f(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$xf(x) - 4 - \int_1^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8)$$

两边对 x 求导得

$$xf'(x) + f(x) - f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(4) = 1$$

积分得 $f(x) = \sqrt{x} + C$，由 $1 = 2 + C$，解得 $C = -1$，于是所求函数为

$$f(x) = \sqrt{x} - 1$$

例 3.62(南京大学 1995 年竞赛题)

(1) 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$；

(2) 计算：$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\mathrm{d}x$.

解析　(1) 令 $x = \frac{\pi}{4} - t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$$

$$(2)\ 原式 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\pi\ln 2$$

例 3.63(精选题)　设 $F(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x$，求 $F(-a)$，$F(a^2)$.

解析　作定积分的换元变换，令 $x = \pi - t$，则

$$F(-a) = \int_0^{\pi} \ln(1 + 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^0 \ln(1 - 2a\cos t + a^2)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x = F(a)$$

$$F(a^2) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos x + a^4)\mathrm{d}x \tag{1}$$

由于 $F(-a) = F(a)$，所以

$$\begin{aligned}
2F(a) &= F(a) + F(-a) = \int_0^{\pi} [\ln(1 - 2a\cos x + a^2) + \ln(1 + 2a\cos x + a^2)]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \ln[(1 + a^2)^2 - 4a^2\cos^2 x]\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos 2x + a^4)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a^2\cos t + a^4)\mathrm{d}t \quad (\text{令 } 2x = t) \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos t + a^4)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 - 2a^2\cos t + a^4)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos t + a^4)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos u + a^4)\mathrm{d}u\right] \\
&\qquad\qquad (\text{第 2 项中令 } t = 2\pi - u) \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos x + a^4)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos x + a^4)\mathrm{d}x\right] \\
&= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2\cos x + a^4)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2}$$

比较(1)与(2)式即得 $F(a^2) = 2F(a)$.

3.2.7　定积分在几何与物理上的应用(例 3.64—3.75)

例 3.64(南京大学 [illegible] 年竞赛题)　下面的推导是错误的，请说明理由.

(1) 因为

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x = \frac{-1}{\cos x}\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此 $0 = -1$.

(2) 已知椭圆的参数方程为 $x = 2\cos\theta$，$y = \sin\theta$，而 $\rho^2 = x^2 + y^2$，从而椭圆的面积为

$$V = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \mathrm{d}\theta\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\theta + \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{5}{2}\pi$$

解析　(1) 错误在

$$\frac{-1}{\cos x}\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -1$$

正确的做法是

$$\frac{-1}{\cos x}\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-1\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(-1)-(-1)=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

(2) 错误在椭圆的极坐标方程为

$$\rho^2=x^2+y^2=4\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

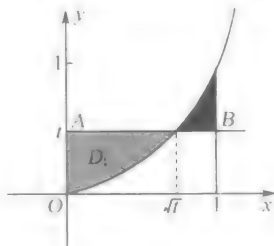
正确的做法是将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入椭圆方程 $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$，由此可得 $\rho^2\left(\frac{1}{4}\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=1$，解得椭圆的极坐标方程为

$$\rho^2=\frac{4}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$$

$$A=4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\mathrm{d}\theta\right)=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+4\tan^2\theta}\mathrm{d}\tan\theta=4\arctan(2\tan\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-}=2\pi$$

例 3.65（莫斯科农业生产工程学院 1977 年竞赛题） 在 y 轴上过坐标为 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的点 A 作平行于 x 轴的直线 AB，它与 $y=x^2$，$x=1$ 以及 y 轴所围阴影部分 D_1 与 D_2（如图所示）的面积之和为 S，求 S 的最大值与最小值.



解析 应用定积分，面积 S 为

$$S=\int_0^{\sqrt{t}}(t-x^2)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{t}}^1(x^2-t)\mathrm{d}x$$

$$=t\sqrt{t}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{t}}+\frac{1}{3}x^3\Big|_{\sqrt{t}}^1-t(1-\sqrt{t})$$

$$=\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}$$

由 $S'=2\sqrt{t}-1=0$，解得驻点 $t=\frac{1}{4}$，则

$$\max S=\max\left\{S(0),S\left(\frac{1}{4}\right),S(1)\right\}=\max\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$$

$$\min S=\min\left\{S(0),S\left(\frac{1}{4}\right),S(1)\right\}=\frac{1}{4}$$

即 $t=1$ 时 S 取最大值 $\frac{2}{3}$，$t=\frac{1}{4}$ 时 S 取最小值 $\frac{1}{4}$.

例 3.66（江苏省 2000 年竞赛题） 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 (a,a^2) 作切线，问 a 为何值时所作切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的图形面积最小？

解析　由题意可得抛物线 $y=x^2$ 在 (a,a^2) 处的切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，即 $y=2ax-a^2$. 令 $\begin{cases} y=2ax-a^2, \\ y=-x^2+4x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2+2(a-2)x+1-a^2=0$，设此方程的两个解为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则

$$x_1 \cdot x_2 = 1-a^2$$

$$x_1+x_2=2(2-a)$$

$$x_2-x_1=2\sqrt{2a^2-4a+3}$$

设抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 下方、切线上方图形的面积为 S，则

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x-1-2ax+a^2)\mathrm{d}x \\ &= (x_2-x_1)\left[-\frac{1}{3}((x_1+x_2)^2-x_1x_2)+(2-a)(x_1+x_2)+a^2-1\right] \\ &= (x_2-x_1)\frac{2}{3}(2a^2-4a+3) \\ &= \frac{4}{3}(2a^2-4a+3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$S'=2(2a^2-4a+3)^{\frac{1}{2}}(4a-4)$$

令 $S'=0$，解得惟一驻点 $a=1$，且 $a<1$ 时 $S'<0$，$a>1$ 时 $S'>0$，所以 $a=1$ 为极小值点，即最小值点. 于是 $a=1$ 时切线与抛物线所围面积最小.

例 3.67（江苏省 2006 年竞赛题）　已知曲线 Γ 的极坐标方程

$$\rho=1+\cos\theta \quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

求该曲线在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 所对应的点处的切线 L 的直角坐标方程，并求曲线 Γ、切线 L 与 x 轴所围图形的面积.

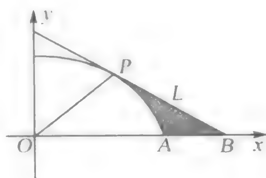
解析　曲线的参数方程为

$$x=\rho\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'}{x'}=\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{-\sin\theta-\sin2\theta}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=1-\sqrt{2}$$

又 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，故切线 L 的方程为

$$y-\frac{1+\sqrt{2}}{2}=(1-\sqrt{2})\left(x-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$



即 $y=(1-\sqrt{2})x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 令 $y=0$，得 $x=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$. 如图所示，三角形 OPB 的面积为

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{10+7\sqrt{2}}{8}$$

曲边三角形 OPA 的面积为

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

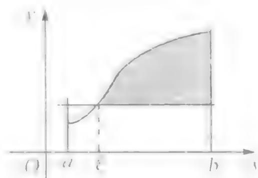
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{8}$$

于是所求图形的面积为

$$S = S_1 - S_2 = \frac{9}{8}+\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{3}{16}\pi$$

例 3.68(精选题) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导,且 $f(a)>0$,$f'(x)>0$,求证:存在惟一的 $\xi\in(a,b)$,使得由 $y=f(x)$,$x=b$,$y=f(\xi)$ 所围的图形的面积与由 $y=f(x)$,$x=a$,$y=f(\xi)$ 所围的图形的面积之比为 2010.

解析 因 $f'(x)>0$,所以 $y=f(x)$ 的图形在$[a,b]$上严格增. 右图所示两块阴影区域的面积分别为



$$\int_a^{\xi}(f(\xi)-f(x))\mathrm{d}x,\qquad \int_{\xi}^{b}(f(x)-f(\xi))\mathrm{d}x$$

作辅助函数

$$F(x) = \int_x^b[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t - 2010\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

则

$$F(a) = \int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t > 0 \quad (\text{因 } f(t)>f(a))$$

$$F(b) = -2010\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t < 0 \quad (\text{因 } f(t)<f(b))$$

因 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,应用零点定理,$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得 $F(\xi)=0$,即

$$\int_{\xi}^{b}[f(t)-f(\xi)]\mathrm{d}t = 2010\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(t)]\mathrm{d}t$$

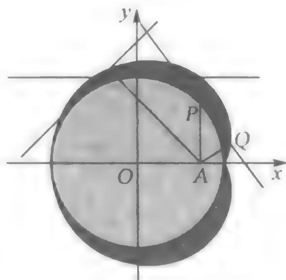
由于

$$F(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t - f(x)(b-x) - 2010f(x)(x-a) + 2010\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}F'(x) &= -f(x)-f'(x)(b-x)+f(x)-2010f'(x)(x-a)-2010f(x)+2010f(x)\\ &= -f'(x)[(b-x)+2010(x-a)]<0\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 在$[a,b]$上严格减. 于是上述应用零点定理的 ξ 是惟一的.

例 3.69(莫斯科电气学院1977年竞赛题)　点A位于半径为a的圆周内部,且离圆心的距离为$b(0\leqslant b<a)$,从点A向圆周上所有点的切线作垂线,求所有垂足所围成的图形的面积.



解析　设圆周方程为$x^2+y^2=a^2$,点A位于$(b,0)$,在圆周上任取点$P(x_0,y_0)$,过点P作圆的切线L,则L的方程为$x_0x+y_0y=a^2$,这里(x,y)为L上点的流动坐标.过点A作L的垂线AQ,则直线AQ的参数方程为

$$x=b+x_0t,\quad y=y_0t$$

将其代入L的方程,解得垂足Q所对应的参数为$t=1-\dfrac{b}{a^2}x_0$,于是垂足Q的坐标(x,y)为

$$x=b+x_0\left(1-\frac{b}{a^2}x_0\right),\qquad y=y_0\left(1-\frac{b}{a^2}x_0\right)$$

令$x_0=a\cos t$, $y_0=a\sin t$,代入上式得垂足Q的坐标(x,y)为

$$x=b+\left(1-\frac{b}{a}\cos t\right)a\cos t=b+a\cos t-b\cos^2 t$$

$$y=\left(1-\frac{b}{a}\cos t\right)a\sin t=a\sin t-b\sin t\cos t$$

垂足Q的轨迹显见对称于x轴,它与x轴的交点为$(-a,0)$与$(a,0)$.于是所求图形的面积为

$$\begin{aligned}S&=2\int_{-a}^{a}y\,\mathrm{d}x=2\int_{\pi}^{0}(a\sin t-b\sin t\cos t)\,\mathrm{d}(b+a\cos t-b\cos^2 t)\\&=2\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot(a^2-3ab\cos t+2b^2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t\\&=a^2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi}-2ab\sin^3 t\Big|_0^{\pi}+\frac{b^2}{2}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi}\\&=a^2\pi+\frac{b^2}{2}\pi=\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)\pi\end{aligned}$$

例 3.70(江苏省2006年竞赛题)　现过点$(1,5)$作曲线$\Gamma:y=x^3$的切线L.(1)求L的方程;(2)求Γ与L所围平面图形D的面积;(3)求图形D的$x\geqslant 0$的部分绕x轴旋转一周所得立体的体积.

解析　(1)设切点为(x_0,x_0^3), $y'(x_0)=3x_0^2$,所以L的方程为

$$y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$$

令$x=1,y=5$,代入上面的方程得$2x_0^3-3x_0^2+5=0$,有惟一实根$x_0=-1$,故切点为$(-1,-1)$.切线L的方程为$y=3x+2$.

(2) 由$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 3x + 2 \end{cases}$解得 $x = -1, 2$，所求 D 的面积为

$$S = \int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$

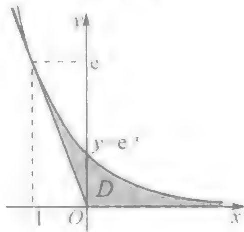
(3) 所求体积为

$$V = \pi\int_{0}^{2} [(3x + 2)^2 - (x^3)^2]\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{2} (9x^2 + 12x + 4 - x^6)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left(3x^3 + 6x^2 + 4x - \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{264}{7}\pi$$

例 3.71(江苏省 2012 年竞赛题)　过点(0,0) 作曲线 Γ：$y = \mathrm{e}^{-x}$ 的切线 L，设 D 是以曲线 Γ、切线 L 及 x 轴为边界的无界区域(如下图所示)．(1) 求切线 L 的方程；(2) 求区域 D 的面积；(3) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解析　(1) 设切点为(a, e^{-a})，则



$$L：y - \mathrm{e}^{-a} = -\mathrm{e}^{-a}(x - a)$$

用(0,0) 代入，得 $a = -1$，于是切线 L 的方程为

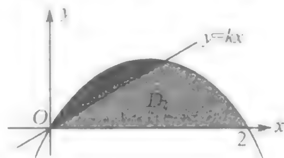
$$y = -\mathrm{e}x$$

(2) 因切点为$(-1, \mathrm{e})$，故区域 D 的面积为

$$S = \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathrm{e} = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{+\infty} - \frac{1}{2}\mathrm{e} = \frac{1}{2}\mathrm{e}$$

(3) $V = \pi\int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2 = -\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_{-1}^{+\infty} - \frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2 = \frac{1}{2}\pi\mathrm{e}^2 - \frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2 = \frac{1}{6}\pi\mathrm{e}^2$.

例 3.72(精选题)　设 D 是由 $y = 2x - x^2$ 与 x 轴所围的平面图形，直线 $y = kx$ 将 D 分成两部分(如右图所示)，若 D_1 与 D_2 的面积分别为 S_1 与 S_2，$S_1 : S_2 = 1 : 7$，求平面图形 D_1 的周长以及 D_1 绕 y 轴旋转一周的旋转体的体积.



解析　曲线 $y = 2x - x^2$ 与直线 $y = kx$ 的交点为 $O(0,0)$，$A(2 - k, k(2 - k))(0 < k < 2)$，于是

$$S_1 = \int_{0}^{2-k} (2x - x^2 - kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(2 - k)^3$$

$$S_1 + S_2 = \int_{0}^{2} (2x - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = (S_1 + S_2) - S_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(2 - k)^3$$

由 $S_1 : S_2 = 1 : 7$,所以 $S_2 = 7S_1$,即

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{6}(2-k)^3 = \frac{7}{6}(2-k)^3$$

由此解得 $k = 1$,于是点 A 的坐标为(1,1).

区域 D_1 的周长为

$$l = \sqrt{2} + \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} + \int_0^1 \sqrt{1+4(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad (\text{设 } t = 2(1-x))$$

因为

$$I = \int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$
$$= 2\sqrt{5} - \int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$
$$= 2\sqrt{5} - I + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^2 = 2\sqrt{5} - I + \ln(2+\sqrt{5})$$

所以

$$I = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

于是

$$l = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

区域 D_1 绕 y 轴旋转一周的立体的体积为

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 1^2) \cdot 1 - \pi\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{3} - \pi\int_0^1 (1-\sqrt{1-y})^2\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\pi}{3} - \pi\int_0^1 [1-2\sqrt{1-y}+1-y]\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\pi}{3} - \pi\left(2y + \frac{4}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

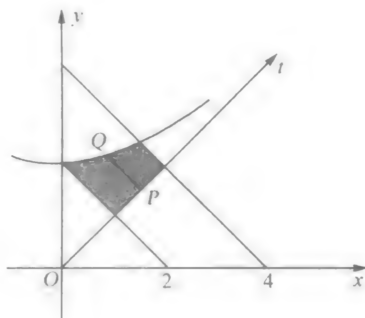
例 3.73(江苏省 2004 年竞赛题)　设 D:$y^2 - x^2 \leqslant 4$,$y \geqslant x$,$x+y \geqslant 2$,$x+y \leqslant 4$. 在 D 的边界 $y = x$ 上任取点 P,设 P 到原点的距离为 t,作 PQ 垂直于 $y = x$,交 D 的边界 $y^2 - x^2 = 4$ 于 Q.

(1) 试将 P,Q 的距离 $|PQ|$ 表示为 t 的函数;

(2) 求 D 绕 $y = x$ 旋转一周的旋转体体积.

解析　如下图所示,沿 $y = x$ 作坐标轴 t,原点在 O,则 P 在 t 轴上的坐标为 t. 在 xy 平面上 P 的坐标为$\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$,所以直线 PQ 的方程为

$$y=-x+\sqrt{2}t\quad(\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 2\sqrt{2})$$



由

$$\begin{cases}y=-x+\sqrt{2}t,\\ y^2-x^2=4\end{cases}$$

解得点 Q 的横坐标为 $x_0=\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{t}$，所以

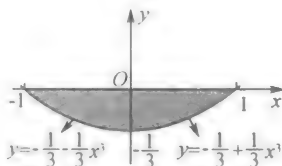
$$|PQ|=\sqrt{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-x_0\right)=\frac{2}{t}$$

所求旋转体体积为

$$V=\pi\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}|PQ|^2\mathrm{d}t=\pi\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{4}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$=4\pi\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$$

例 3.74(北京市 1994 年竞赛题)　设

$$f(x)=\int_{-1}^{x}t\,|\,t\,|\,\mathrm{d}t$$



求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成封闭图形的面积.

解析　根据题意可知

$$f(x)=\begin{cases}\int_{-1}^{x}(-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}(x^3+1), & x\leqslant 0;\\ \int_{-1}^{0}(-t^2)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^3-1), & x>0\end{cases}$$

故 $f(x)$ 为偶函数. 所以曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成封闭图形(如上图)的面积为

$$S=2\int_0^1\left[0-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^3\right)\right]\mathrm{d}x=2\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

例 3.75(江苏省 1994 年竞赛题)　设均匀细杆 AB 质量为 M，长度为 l，质量为 m 的质点 C 位于 AB 的延长线上，当质点 C 从距 B 点 r_1 处移到距 B 点 r_2 处($r_1>r_2$)，求引力所作的功.

解析　如下图所示，细杆位于 x 轴上区间$[0,l]$，质点 C 从 x 轴上坐标 $l+r_1$ 处移动到坐标为 $l+r_2$ 处. 在细杆上取点 x、$x+\mathrm{d}x$，将细杆段$[x,x+\mathrm{d}x]$视为质点 D，质量为$\frac{M}{l}\mathrm{d}x$，位于 x 处. 设质点 C 的坐标为 u，则质点 C 在质点 D 的引力作用下从 $l+r_1$ 处移动到 $l+r_2$ 处所作的功为



$$\mathrm{d}W = -\int_{l+r_1}^{l+r_2} k \frac{\frac{M}{l}\mathrm{d}x \cdot m}{(u-x)^2}\mathrm{d}u = \frac{k}{l}mM\left(\frac{1}{u-x}\right)\Big|_{l+r_1}^{l+r_2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{k}{l}mM\left(\frac{1}{l+r_2-x} - \frac{1}{l+r_1-x}\right)\mathrm{d}x$$

于是质点 C 在细杆 AB 的引力作用下所作的功为

$$W = \int_0^l \mathrm{d}W = \int_0^l \frac{k}{l}mM\left(\frac{1}{l+r_2-x} - \frac{1}{l+r_1-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{k}{l}mM\ln\frac{l+r_1-x}{l+r_2-x}\Big|_0^l = \frac{k}{l}mM\ln\frac{r_1r_2+lr_1}{r_1r_2+lr_2}$$

3.2.8　积分不等式的证明(例 3.76—3.102)

例 3.76(江苏省 1994 年竞赛题)　试证明：$\ln(1+\sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x < 1$.

解析　当 $0 < x < 1$ 时 $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} < \frac{1}{\sqrt[4]{1+0}} = 1$，且 $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} < \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$，所以

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x < \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1$$
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

即

$$\ln(1+\sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x < 1$$

例 3.77(浙江省 2011 年竞赛题)　设 $f:[0,1]\to[-a,b]$ 连续，且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = ab$，证明：

$$0 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

解析　由 $-a \leqslant f(x) \leqslant b$，可得 $-\frac{a+b}{2} \leqslant f(x) - \frac{b-a}{2} \leqslant \frac{a+b}{2}$，于是

$$0 \leqslant \left(f(x) - \frac{b-a}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

所以

$$0 \leqslant \int_0^1 \left(f(x) - \frac{b-a}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

展开得

$$0 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - (b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{(b-a)^2}{4} \leqslant \frac{(b+a)^2}{4}$$

将$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = ab$ 代入得

$$0 \leqslant -(b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{(b+a)^2}{4} \leqslant \frac{(b+a)^2}{4}$$

移项得

$$0 \leqslant (b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b+a)^2}{4}$$

所以$0 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$.

例 3.78(全国大学生2014年决赛题)　设$f(x)$是闭区间$[0,1]$上的连续函数，且满足$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$，求函数$f(x)$，使得$I = \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$取得最小值.

解析　应用柯西-施瓦兹不等式，有

$$\begin{aligned}1^2 &= \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此可得$\int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{\pi}$，即$\int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$的最小值为$\frac{4}{\pi}$. 因此，只要函数$f(x)$满足

$$\int_0^1 \frac{4}{\pi}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$$

故所求函数为$f(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}$.

例 3.79(江苏省1998年竞赛题)　设函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上导数连续，$f'(x) \geqslant 0$，求证：对任意正整数n，有

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{n}[f(2\pi) - f(0)]$$

解析　由题意可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\cos nx \\ &= -\frac{1}{n}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因 $f'(x)\geqslant 0$,故 $f(x)$ 在$[0,2\pi]$上单调增,$f(2\pi)\geqslant f(0)$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)|\cos nx|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]\end{aligned}$$

例 3.80(精选题)　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调增加且连续,求证:

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

解析　令

$$F(x) = 2\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t - (a+x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

这里 $a\leqslant x\leqslant b$,则 $F(a)=0$. 由于

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2xf(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (a+x)f(x) \\ &= xf(x) - af(x) - f(\xi)(x-a) \\ &= (x-a)(f(x)-f(\xi))\end{aligned}$$

其中 $a<\xi<x$,ξ 是应用积分中值定理得到的,而 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调增,所以 $f(x)\geqslant f(\xi)$,于是 $F'(x)\geqslant 0$,故 $F(x)$ 在$[a,b]$上单调增,$F(b)\geqslant F(a)=0$,即

$$2\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant (a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

例 3.81(莫斯科全苏大学生 1976 年竞赛题)　已知函数 $f(x)$ 定义于$[0,1]$且单调减、可积,求证:$\forall\,\alpha\in(0,1)$,有

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

解析　(这里没有 f 连续的条件,所以不能使用积分中值定理)由于 $f(x)$ 单调减,故有

$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f(\alpha)\alpha,\quad \int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(\alpha)(1-\alpha)$$

由此得

$$\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(\alpha)\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\alpha\int_{\alpha}^{1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant(1-\alpha)\int_{0}^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x$$

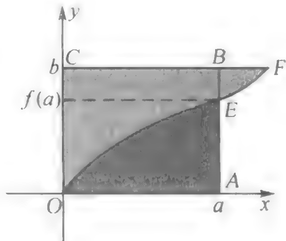
$$\alpha\left(\int_{\alpha}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_{0}^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x$$

于是有

$$\int_{0}^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

例 3.82(南京大学 1996 年竞赛题)　设函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且严格增,$f(0)=0$,f^{-1} 是 f 的反函数,证明:对任意 $a>0$, $b>0$,恒有

$$ab\leqslant\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f^{-1}(y)\mathrm{d}y$$



解析　(1) 若 $f(a)\leqslant b$,首先从几何上由右图可看出

$$\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\text{曲边梯形 } OAE \text{ 的面积 } S_1$$

$$\int_{0}^{b}f^{-1}(y)\mathrm{d}y=\text{曲边梯形 } OFC \text{ 的面积 } S_2$$

$$S_1+S_2\geqslant\text{矩形 } OABC \text{ 的面积 } ab$$

下面给出证明:

$$\int_{0}^{b}f^{-1}(y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{f(a)}f^{-1}(y)\mathrm{d}y+\int_{f(a)}^{b}f^{-1}(y)\mathrm{d}y\tag{1}$$

在(1)式右端第一个积分中,令 $x=f^{-1}(y)$,则

$$\int_{0}^{f(a)}f^{-1}(y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{a}x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_{0}^{a}-\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=af(a)-\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x\tag{2}$$

在(1)式右端的第二个积分中,因 $f^{-1}(y)$ 严格增,故 $f^{-1}(y)\geqslant f^{-1}(f(a))=a$,得

$$\int_{f(a)}^{b}f^{-1}(y)\mathrm{d}y\geqslant\int_{f(a)}^{b}a\mathrm{d}y=a(b-f(a))\tag{3}$$

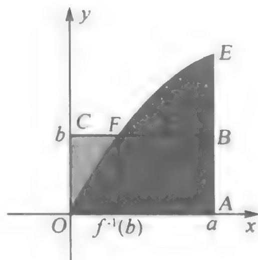
将(2),(3)两式代入(1)式得

$$\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \geqslant af(a) - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + ab - af(a) = ab - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

移项即得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \geqslant ab$$

(2) 若 $f(a) > b$，从几何上由右图可看出



$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \text{曲边梯形 } OAE \text{ 的面积 } S_1$$

$$\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y = \text{曲边梯形 } OFC \text{ 的面积 } S_2$$

$$S_1 + S_2 \geqslant \text{矩形 } OABC \text{ 的面积 } ab$$

下面给出证明：

因 $f(a) > b$，所以 $a > f^{-1}(b)$，则

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\mathrm{d}x + \int_{f^{-1}(b)}^a f(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

在(4) 式右端的第一个积分中，令 $y = f(x)$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^b y\mathrm{d}f^{-1}(y) = yf^{-1}(y)\Big|_0^b - \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \\ &= bf^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5}$$

在(4) 右端的第二个积分中，因 $f(x) \geqslant b$，所以

$$\int_{f^{-1}(b)}^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{f^{-1}(b)}^a b\mathrm{d}x = b(a - f^{-1}(b)) \tag{6}$$

将(5)，(6) 两式代入(4) 式得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant bf^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y + ab - bf^{-1}(b) = ab - \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y$$

移项即得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \geqslant ab$$

例 3.83(莫斯科电气学院 1976 年竞赛题)　证明：$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\mathrm{d}x > 0$.

解析　令 $x^2 = t$，则

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t$$

对于上式右端的第二项，令 $t - \pi = u$，则

$$\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t}}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi+u}}\sin(u+\pi)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi+u}}\sin u\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi+t}}\sin t\mathrm{d}t$$

于是

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin t\mathrm{d}t \tag{*}$$

由于 $0<t<\pi$ 时，$\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}>0,\sin t>0$，并且

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\sqrt{t}}=0$$

所以(*)式右端是常义定积分，且$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin t$ 在$(0,\pi)$上连续，故

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin t\mathrm{d}t>0$$

例 3.84(莫斯科钢铁与合金学院 1977 年竞赛题)　求证：

$$\int_{0}^{1}\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x>\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

解析　令 $x=\sin t$，则

$$\int_{0}^{1}\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)\mathrm{d}t$$

令 $x=\cos t$，则

$$\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)\mathrm{d}t$$

$$\cos(\sin t)-\sin(\cos t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin t\right)-\sin(\cos t)$$

令 $f(t)=\frac{\pi}{2}-\sin t-\cos t$，则由 $f'(t)=-\cos t+\sin t=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$，又 $f''(t)=\sin t+\cos t>0$，则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}(>0)$ 为极小值，故 $f(t)>0$，$\frac{\pi}{2}-\sin t>\cos t\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin t\right)-\sin(\cos t)>0$，所以

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)\mathrm{d}t>\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos t)\mathrm{d}t$$

即

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

例 3.85(精选题)　已知函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{a},a\right]$ 上连续($a>0$),且 $f(x)\geqslant 0$,$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\mathrm{d}x=0$,求证:$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

解析　当 $-\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant a$ 时

$$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)\geqslant 0$$

又 $f(x)\geqslant 0$,所以 $(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)f(x)\geqslant 0\left(-\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant a\right)$,即

$$\left[1-x^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)x\right]f(x)\geqslant 0$$

应用定积分的保向性,上式两边从 $-\frac{1}{a}$ 到 a 积分得

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x+\left(a-\frac{1}{a}\right)\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

由此即得

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant \int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

例 3.86(全国大学生 2015 年预赛题)　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$. 求证:(1) $\exists\xi\in[0,1]$,使得 $|f(\xi)|>4$;(2) $\exists\eta\in[0,1]$,使得 $|f(\eta)|=4$.

解析　(1)(反证法)设 $\forall x\in[0,1]$,有 $|f(x)|\leqslant 4$. 由于

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$$

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$

又

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

所以

$$\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \mid f(x) \mid \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_0^1 (4 - \mid f(x) \mid) \left|x - \frac{1}{2}\right| \mathrm{d}x = 0$$

于是 $\mid f(x) \mid \equiv 4 (0 \leqslant x \leqslant 1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ 或 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -4$. 而此与条件 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾,故 $\exists \xi \in [0,1]$,使得 $\mid f(\xi) \mid > 4$.

(2) 因 $f \in C[0,1]$,故 $\mid f(x) \mid \in C[0,1]$. 应用积分中值定理,$\exists \lambda \in (0,1)$,使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(\lambda) = 0$$

于是 $\mid f(\lambda) \mid = 0$. 对连续函数 $\mid f(x) \mid$,因 $\mid f(\lambda) \mid = 0$, $\mid f(\xi) \mid > 4$,应用介值定理,$\exists \eta \in [0,1]$,使得 $\mid f(\eta) \mid = 4$.

例 3.87(南京大学 1993 年竞赛题)　证明:

$$\int_0^\pi x a^{\sin x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^3}{4},\quad a > 0 \text{ 为常数}$$

解析　令 $x = \frac{\pi}{2} + t$,并应用奇函数在对称区间上积分的性质,有

$$\int_0^\pi x a^{\sin x}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + t\right) a^{\cos t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t}\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t a^{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}\mathrm{d}x + 0 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}\mathrm{d}x$$

代入原式左边,应用柯西-施瓦兹不等式得

$$\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x\right) \geqslant \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{\cos x}{2}} \cdot a^{-\frac{\cos x}{2}}\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^3$$

例 3.88(精选题)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(a) = f(b) = 0$,求证:$\forall x \in [a,b]$,有

$$\mid f(x) \mid \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b \mid f'(x) \mid \mathrm{d}x$$

解析　由于

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a) = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

$$\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(x) = -f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

所以 $\forall x \in [a,b]$，有

$$|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t$$

$$|f(x)| = \left|\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^b |f'(t)|\mathrm{d}t$$

两式相加得

$$2|f(x)| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

即

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

例 3.89（莫斯科铁路运输工程学院 1975 年竞赛题）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续可导，$f(0) = f(2) = 1$，$|f'(x)| \leqslant 1$，求证：$1 < \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x < 3$.

解析　当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x = 1 + f'(\xi)x \quad (0 < \xi < x)$$

则 $1 - x \leqslant f(x) \leqslant 1 + x$. 当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x) = f(2) + f'(\eta)(x-2) = 1 + f'(\eta)(x-2) \quad (x < \eta < 2)$$

则 $x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 3 - x$. 于是

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x < \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (3-x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

上式中取不等号“$<$”，是因为不可能出现

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

的情况（此时 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导）. 同样，有

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x > \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

上式中取不等号“$>$”，是因为不可能出现

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

的情况(此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导).

例 3.90(浙江省 2005 年竞赛题)　证明:对任意连续函数 $f(x)$,有

$$\max\left\{\int_{-1}^{1}\mid x-\sin^2 x-f(x)\mid \mathrm{d}x,\int_{-1}^{1}\mid \cos^2 x-f(x)\mid \mathrm{d}x\right\}\geqslant 1$$

解析　由于

$$\begin{aligned}&\mid x-\sin^2 x-f(x)\mid+\mid \cos^2 x-f(x)\mid\\ \geqslant&\mid x-\sin^2 x-f(x)-\cos^2 x+f(x)\mid=\mid x-1\mid\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\mid x-\sin^2 x-f(x)\mid \mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mid \cos^2 x-f(x)\mid \mathrm{d}x\\ \geqslant&\int_{-1}^{1}\mid x-1\mid \mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-x)\mathrm{d}x=2\end{aligned}$$

于是

$$\max\left\{\int_{-1}^{1}\mid x-\sin^2 x-f(x)\mid \mathrm{d}x,\int_{-1}^{1}\mid \cos^2 x-f(x)\mid \mathrm{d}x\right\}\geqslant 1$$

例 3.91(莫斯科大学 1977 年竞赛题)　设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续可导,求证:

$$\int_0^1\mid f(x)\mid \mathrm{d}x\leqslant \max\left\{\int_0^1\mid f'(x)\mid \mathrm{d}x,\ \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

解析　(1) 若 $f(x)$ 在$(0,1)$上满足 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$,则

$$\int_0^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$$

(2) 若上述(1)不成立,应用零点定理知 $\exists c\in(0,1)$,使得 $f(c)=0$,且

$$\int_c^x f'(x)\mathrm{d}x=f(x)-f(c)=f(x)$$

这里 $x\in[0,1]$. 于是

$$\mid f(x)\mid=\left|\int_c^x f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_c^x\mid f'(x)\mid \mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\mid f'(x)\mid \mathrm{d}x$$

上式两边从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1\mid f(x)\mid \mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\mid f'(x)\mid \mathrm{d}x$$

由(1)与(2)即得

$$\int_0^1\mid f(x)\mid \mathrm{d}x\leqslant \max\left\{\int_0^1\mid f'(x)\mid \mathrm{d}x,\ \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

例 3.92（江苏省2008年竞赛题）　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数，求证：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

解析　**方法 1**　应用积分中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

因为 $\int_\xi^x f'(x)\mathrm{d}x=f(x)-f(\xi)$，所以 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|f(\xi)|+\left|\int_\xi^x f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|f(\xi)|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

方法 2　由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可得 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据最值定理，$\exists x_0\in[a,b]$，使得 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$。因为

$$\int_{x_0}^x f'(x)\mathrm{d}x=f(x)-f(x_0),\quad x\in[a,b]$$

$$f(x_0)=f(x)-\int_{x_0}^x f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\left(\int_{x_0}^x f'(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}|f(x_0)|(b-a)&\leqslant\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b\left(\int_{x_0}^x f'(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b\left(\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\\&=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\cdot(b-a)\end{aligned}$$

于是

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=|f(x_0)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

例 3.93（南京大学1996年竞赛题）　设 $f(a)=0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的导数连续，求证：

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|,\quad x\in[a,b]$$

解析　应用拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(a,x)$，这里 $a<x\leqslant b$，使得

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\Rightarrow |f(x)|\leqslant M|x-a|$$

这里$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$(由于$|f'(x)|$在$[a,b]$上连续,所以$|f'(x)|$在$[a,b]$上有最大值$M$). 上式两边从$a$到$b$积分得

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x&\leqslant M\int_a^b|x-a|\mathrm{d}x=M\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(x-a)^2\Big|_a^b\\&=\frac{1}{2}M(b-a)^2=\frac{1}{2}\max|f'(x)|\cdot(b-a)^2\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\max|f'(x)|$$

例3.94(莫斯科大学1977年竞赛题)　设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续可导,且$f(a)=f(b)=0$,求证:

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$$

解析　因$|f'(x)|$在$[a,b]$上连续,应用最值定理,有

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|=M$$

存在. $\forall x\in(a,b)$,则有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+f'(\xi)(x-a)=f'(\xi)(x-a)\\f(x)&=f(b)+f'(\eta)(x-b)=f'(\eta)(x-b)\end{aligned}$$

这里$a<\xi<x$, $x<\eta<b$. 于是有

$$|f(x)|\leqslant M(x-a),\quad |f(x)|\leqslant M(b-x)$$

$\forall x_0\in(a,b)$,则

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^{x_0}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_a^{x_0}(x-a)\mathrm{d}x+M\int_{x_0}^b(b-x)\mathrm{d}x\\&=M\left[x_0^2-(a+b)x_0+\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right]\qquad(*)\end{aligned}$$

令$u=x_0^2-(a+b)x_0+\frac{1}{2}(a^2+b^2)$,则$u'=2x_0-(a+b)$. 由$u'=0$得驻点$x_0=\frac{1}{2}(a+b)$,又$u''=2>0$,所以$u\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{4}(b-a)^2$为$u$的最小值.

由于(*)式对(a,b)中的任意x_0皆成立,取$x_0=\frac{1}{2}(a+b)$,即得

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}(b-a)^2 M = \frac{1}{4}(b-a)^2 \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$$

例 3.95(北京市 1990 年竞赛题)　设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,且对于 $t\in[0,1]$ 及 $x_1,x_2\in[a,b]$ 满足

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

解析　令 $x=a+t(b-a)$,则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(a+t(b-a))\cdot(b-a)\mathrm{d}t\\ &\leqslant (b-a)\int_0^1[(1-t)f(a)+tf(b)]\mathrm{d}t\\ &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

右边不等式得证. 又令 $x=a+b-u$,有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-u)\mathrm{d}u + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x)\right)\mathrm{d}x\\ &\geqslant 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

左边不等式得证.

例 3.96(北京市 1990 年竞赛题)　设 $f(x)$ 是定义在区间$[0,1]$上的连续函数,且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$,对于 $x\in[0,1]$,证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$$

解析 由于$\dfrac{(f(x)-m)(M-f(x))}{f(x)}\geqslant 0$,故有

$$f(x)+\frac{mM}{f(x)}\leqslant m+M$$

两边同时积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(m+M)\mathrm{d}x=m+M$$

又

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{mM}\sqrt{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)}$$

平方后得到

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$$

例 3.97(北京市 1996 年竞赛题) 设 $f(x)$ 是区间$[0,1]$上的连续可微函数,且当 $x\in(0,1)$ 时,$0<f'(x)<1$,$f(0)=0$,证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x>\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

解析 利用柯西-施瓦兹不等式有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_0^1 f(x)\cdot 1\mathrm{d}x\right)^2\\&<\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 1^2\mathrm{d}x\quad(\text{因 } f(x)\neq 1)\\&=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从而左边不等式成立. 构造

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$$

则 $F(0)=0$,且

$$\begin{aligned}F'(x)&=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)-f^3(x)\\&=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]\end{aligned}$$

记 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则 $G(0)=0$，且

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)(1-f'(x))$$

因为 $0<f'(x)<1$，$f(0)=0\Rightarrow f(x)$ 严格增 $\Rightarrow f(x)>f(0)=0$，于是 $G'(x)>0\Rightarrow G(x)$ 严格增 $\Rightarrow G(x)>G(0)=0\Rightarrow F'(x)>0$，从而 $F(x)$ 严格增 $\Rightarrow F(1)>F(0)=0$，即

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

从而右边不等式得证.

例 3.98(精选题)　设 $f(x)$ 二阶可导，$f''(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 为连续函数，$a>0$，求证：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(g(x))\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)$$

解析　$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的一阶泰勒展式为

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2\\&\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\end{aligned}$$

这里 ξ 介于 x 与 x_0 之间. 令 $x=g(t)$，$x_0=\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$，则

$$f(g(t))\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\left(g(t)-\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)$$

应用定积分的保向性，此式两边从 0 到 a 积分得

$$\begin{aligned}\int_0^a f(g(t))\mathrm{d}t&\geqslant af\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a g(t)\mathrm{d}t-\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\\&=af\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(g(x))\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x\right)$$

例 3.99(精选题)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，$M_1>0$，$M_2>0$ 且 $|f(x)|\leqslant M_1$，$|f''(x)|\leqslant M_2$，求证：$\forall x\in[a,+\infty)$，有 $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{M_1M_2}$.

解析　$\forall x_0\in[a,+\infty)$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的一阶泰勒展式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

这里 ξ 介于 x 与 x_0 之间，所以

$$f'(x_0)=\frac{1}{x-x_0}[f(x)-f(x_0)]-\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)$$

$$\begin{aligned}|f'(x_0)|&\leqslant\frac{1}{|x-x_0|}(|f(x)|+|f(x_0)|)+\frac{1}{2}|f''(\xi)||x-x_0|\\&\leqslant\frac{2}{h}M_1+\frac{1}{2}M_2h\end{aligned}$$

这里 $h=|x-x_0|$. 令 $g(h)=\frac{2}{h}M_1+\frac{1}{2}M_2h$,则

$$g'(h)=-\frac{2}{h^2}M_1+\frac{M_2}{2}=0$$

的惟一解为 $h_0=2\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$,又因 $g''(h_0)=\frac{4}{h_0^3}M_1>0$,所以 $g(h)$ 的最小值为 $g(h_0)=2\sqrt{M_1M_2}$. 于是

$$|f'(x_0)|\leqslant\min\left\{\frac{2}{h}M_1+\frac{1}{2}M_2h\right\}=2\sqrt{M_1M_2}$$

由 $x_0\in[a,+\infty)$ 的任意性即得 $\forall x\in[a,+\infty)$,有 $|f'(x)|\leqslant2\sqrt{M_1M_2}$.

例 3.100(精选题) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上 2 阶连续可导,$f(0)=0$, $f(1)=0$,且 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f(x)\neq0$,求证:$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4$.

解析 由于 $f(x)$ 在$(0,1)$上连续,且 $f(x)\neq0$,所以 $f(x)$ 在$(0,1)$上不变号,不妨设 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f(x)>0$. 应用最值定理,$f(x)$ 在$[0,1]$上有最大值,设

$$\max_{0\leqslant x\leqslant1}f(x)=f(x_0),\quad x_0\in(0,1)$$

则

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\qquad(*)$$

在$[0,x_0]$与$[x_0,1]$上分别应用拉格朗日中值定理,则 $\exists\alpha\in(0,x_0)$ 和$\beta\in(x_0,1)$,使得

$$f(x_0)-f(0)=f'(\alpha)x_0,\quad f(1)-f(x_0)=f'(\beta)(1-x_0)$$

即

$$f'(\alpha)=\frac{f(x_0)}{x_0},\quad f'(\beta)=\frac{f(x_0)}{x_0-1}$$

于是

$$\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \left|\int_\alpha^\beta f''(x)\mathrm{d}x\right| = |f'(\beta)-f'(\alpha)| = \left|\frac{f(x_0)}{x_0-1}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|$$

$$=\frac{f(x_0)}{x_0(1-x_0)}=\frac{f(x_0)}{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x_0\right)^2}\geqslant 4f(x_0)$$

代入(*)式即得$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4.$

例 3.101(北京市 1993 年竞赛题)　求证：$\frac{5}{2}\pi<\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x<2\pi\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$.

解析　运用 e^u 的马克劳林级数，有

$$\mathrm{e}^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2!}\sin^2 x+\cdots+\frac{1}{n!}\sin^n x+\cdots$$

由于 $n=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 时，有

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2k+1}x\mathrm{d}x=0$$

当 $n=2k(k=1,2,\cdots)$ 时，有

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2k}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}x\mathrm{d}x=4\cdot\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

因此，由逐项积分有

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\int_0^{2\pi}\sin^{2k}x\mathrm{d}x=2\pi\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!(2k)!!}\right)$$

$$=2\pi\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\cdot\frac{1}{4^k}\right)$$

从而有

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x>2\pi\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{2}\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x<2\pi\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{4^n}\right)=2\pi\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$$

得证.

例 3.102(浙江省 2006 年竞赛题)　求最小的实数 C，使得满足$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续函数 $f(x)$，都有$\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\leqslant C$.

解析　因为

$$\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1|f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x=\int_0^1|f(t)|2t\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=2$$

又取 $f_n(x)=(n+1)x^n$,则有

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(n+1)x^n\mathrm{d}x=1$$

而

$$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 tf_n(t)\mathrm{d}t=2\cdot\frac{n+1}{n+2}\to 2\quad(n\to\infty)$$

因此 $C=2$.

3.2.9 积分等式的证明(例 3.103—3.105)

例 3.103(精选题) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的 2 阶导数,且 $f'(a)=f'(b)=0$,求证:$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{6}(b-a)^3f''(\xi)$$

解析 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=f(x),F''(x)=f'(x),F'''(x)=f''(x)$,且 $F(a)=0,F''(a)=F''(b)=0$. 函数 $F(x)$ 在 $x=a$ 处的 2 阶泰勒展式为

$$\begin{aligned}F(x)&=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}F''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3\\&=f(a)(x-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_1)(x-a)^3\end{aligned}$$

这里 ξ_1 介于 a 与 x 之间. 令 $x=b$ 得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi_2)(b-a)^3\tag{1}$$

这里 $a<\xi_2<b$. 函数 $F(x)$ 在 $x=b$ 处的 2 阶泰勒展式为

$$\begin{aligned}F(x)&=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}F''(b)(x-b)^2+\frac{1}{3!}F'''(\eta_1)(x-b)^3\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(b)(x-b)+\frac{1}{6}f''(\eta_1)(x-b)^3\end{aligned}$$

这里 η_1 介于 x 与 b 之间. 令 $x=a$ 得

$$0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(b)(b-a)-\frac{1}{6}f''(\eta_2)(b-a)^3\tag{2}$$

这里 $a<\eta_2<b$. (1) 式减(2) 式,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)+\frac{1}{12}[f''(\xi_2)+f''(\eta_2)](b-a)^3\tag{3}$$

若 $f''(\xi_2)=f''(\eta_2)$，则 $\xi=\xi_2$ 或 $\xi=\eta_2$，代入(3)式即得原式；若 $f''(\xi_2)\neq f''(\eta_2)$，由于 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由最值定理，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 与最小值 m，则

$$m<\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\eta_2)]<M$$

再应用介值定理，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\eta_2)]$$

于是有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)+\frac{1}{6}f''(\xi)(b-a)^3$$

例 3.104（精选题）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的 2 阶导数，求证：$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$$

解析　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$，$F'''(x)=f''(x)$，且 $F(a)=0$. $F(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处的 2 阶泰勒展式为

$$\begin{aligned}F(x)=&F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\\&+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\\=&F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\\&+\frac{1}{6}f''(\xi_1)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\end{aligned}\tag{1}$$

这里 ξ_1 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间. 在(1)式中令 $x=a$，得

$$0=F\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{1}{6}f''(\xi_2)\frac{(b-a)^3}{8}\tag{2}$$

这里 $a<\xi_2<\frac{a+b}{2}$. 在(1)式中令 $x=b$，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$+\frac{1}{6}f''(\xi_3)\frac{(b-a)^3}{8} \tag{3}$$

这里$\frac{a+b}{2}<\xi_3<b$.(3)式减去(2)式，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\xi_3)]$$

由于$f''(x)$在$[a,b]$上连续，由最值定理，$f''(x)$在$[\xi_2,\xi_3]$上有最大值M与最小值m，则

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\xi_3)]\leqslant M$$

再应用介值定理，$\exists\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_2)+f''(\xi_3)]$$

于是有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$$

例 3.105(全国大学生 2012 年决赛题)

(1) 求解微分方程$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x\mathrm{e}^{x^2},\\ y(0)=1;\end{cases}$

(2) 如果$y=f(x)$为上述方程的解，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

解析 (1) 这是一阶线性非齐次方程，易于求得解为$y=\mathrm{e}^{x^2}$(过程从略).

(2) 对函数$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$在区间$[0,x](0\leqslant x\leqslant 1)$上应用拉格朗日中值定理，必$\exists\xi\in(0,x)$，使得$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，即

$$\mathrm{e}^{x^2}-1=2\xi\mathrm{e}^{\xi^2}x\Rightarrow 1\leqslant\mathrm{e}^{x^2}=1+2\xi\mathrm{e}^{\xi^2}x\leqslant 1+2\mathrm{e}x$$

于是

$$\frac{n}{n^2x^2+1}\leqslant\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\leqslant\frac{n}{n^2x^2+1}+\frac{2\mathrm{e}nx}{n^2x^2+1}$$

应用定积分的保号性，有

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x=\arctan nx\Big|_0^1=\arctan n$$

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1\left(\frac{n}{n^2x^2+1}+\frac{2\mathrm{e}nx}{n^2x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\arctan nx\Big|_0^1+\frac{\mathrm{e}}{n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1$$
$$=\arctan n+\frac{\mathrm{e}}{n}\ln(1+n^2)$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\arctan n+\frac{\mathrm{e}}{n}\ln(1+n^2)\right)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$$

再应用夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

3.2.10　反常积分(例3.106—3.114)

例3.106(江苏省2000年竞赛题)　设

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$$

求常数 a,b.

解析　原式左边应用洛必达法则，有

$$\text{左边}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x\exp(x^4)}\quad(\text{由此可得 } a=1)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-(1+x)(1+2bx)}{2x(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{-(1+2b)x-2bx^2}{2x}$$
$$=-\frac{1}{2}(1+2b)+0=-\frac{1}{2}(1+2b)$$

原式右边应用广义 $N-L$ 公式，有

$$\text{右边}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=0+1=1$$

于是 $-\frac{1}{2}(1+2b)=1$，解得 $b=-\frac{3}{2}$，即 $a=1,\ b=-\frac{3}{2}$.

例3.107(南京工业大学2009年竞赛题)　$\int_0^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}\mathrm{d}x=$ ______.

解析　**方法1**　令 $\sqrt{\frac{x}{2-x}}=t$，则 $x=2-\frac{2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=-2\mathrm{d}\frac{1}{1+t^2}$，故

$$原式=-2\int_0^{+\infty} t\mathrm{d}\,\frac{1}{1+t^2}=-2\left(\frac{t}{1+t^2}\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$$
$$=0+2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi$$

方法 2 原式 $=\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x(2-x)}}\mathrm{d}x$，令 $\sqrt{x(2-x)}=t(2-x)$，则 $x=2-\frac{2}{1+t^2}$ $=\frac{2t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=-2\mathrm{d}\,\frac{1}{1+t^2}$，故

$$原式=-2\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}\mathrm{d}\,\frac{1}{1+t^2}=-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}\,\frac{1}{1+t^2}$$
$$=-2\left(\frac{t}{1+t^2}\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)=0+2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi$$

例 3.108（南京大学 1993 年竞赛题） $\int_0^{+\infty}x^7\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

解析 **方法 1** 令 $x^2=t$，则

$$原式=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^3\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^3\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{\mathrm{e}^t}\Bigg|_0^{+\infty}-3\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)$$
$$=-\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{\mathrm{e}^t}\Bigg|_0^{+\infty}-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)$$
$$=-3\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-3\left(\frac{t}{\mathrm{e}^t}\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)=-3\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}=3$$

方法 2 令 $x^2=t$，则原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^3\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. 令

$$\int t^3\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-t}(at^3+bt^2+dt+e)+c$$

两边求导得

$$t^3\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}[-at^3+(3a-b)t^2+(2b-d)t+d-e]$$

比较两边 t 的同次幂的系数得 $a=-1,b=-3,d=-6,e=-6$. 于是

$$原式=\frac{1}{2}\cdot\frac{-t^3-3t^2-6t-6}{\mathrm{e}^t}\Bigg|_0^{+\infty}=3$$

例 3.109（莫斯科矿业学院 1977 年竞赛题） 求反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x\quad(\alpha\neq 0)$$

解析 令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x$$

于是

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

例 3.110(全国大学生2009年预赛题)　求 $x\to1-$ 时与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解析　当 $0<x<1$ 时,考察 $\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$,由于

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{t^2}\mathrm{d}t<\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{n^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$$

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{t^2}\mathrm{d}t>\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}x^{(n+1)^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}-1$$

所以

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t<\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}<1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t\tag{*}$$

应用积分公式 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,可得

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\exp(-(t\sqrt{-\ln x})^2)\mathrm{d}t\quad(\text{记 } t\sqrt{-\ln x}=u)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

由于 $x\to1-$ 时,$-\ln x=-\ln(1+x-1)\sim-(x-1)=1-x$,所以 $x\to1-$ 时

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

由(*)式即得:当 $x\to1-$ 时,与 $\sum\limits_{n}x^{n^2}$ 等价的无穷大量为 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

例 3.111(浙江省2005年竞赛题)　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上2阶导数连续,求证:存在 $\zeta\in(-1,1)$,使得

$$\int_{-1}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[2f'(\zeta)+\zeta f''(\zeta)]\tag{1}$$

解析　令 $F(x)=xf(x)$,则 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上2阶导数连续,且 $F(0)=0$,$F'(0)=f(0)$,$F''(x)=2f'(x)+xf''(x)$,于是要证明(1)式,等价于证明存在 $\zeta\in$

$(-1,1)$,使得

$$\int_{-1}^{1} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}F''(\zeta) \tag{2}$$

下面用两种方法证明(2)式.

方法1 (1) 设常数 k 满足 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{6}k$. 令

$$G(x) = \int_0^x F(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f(0)x^2 - \frac{1}{6}kx^3 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

则 $G'(x) = F(x) - f(0)x - \frac{1}{2}kx^2$, $G''(x) = F'(x) - f(0) - kx$, $G'''(x) = F''(x) - k$. 因 $G(0)=0$, $G(1) = \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{6}k = 0$,应用罗尔定理,$\exists \xi_1 \in (0,1)$,使得 $G'(\xi_1) = 0$;又因 $G'(0) = F(0) = 0$,应用罗尔定理,$\exists \xi_2 \in (0,\xi_1)$,使得 $G''(\xi_2) = 0$;又因 $G''(0) = F'(0) - f(0) = f(0) - f(0) = 0$,应用罗尔定理,$\exists \xi_3 \in (0,\xi_2)$,使得 $G'''(\xi_3) = 0$,即 $k = F''(\xi_3)$. 于是

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{6}F''(\xi_3) \tag{3}$$

(2) 设常数 L 满足 $\int_{-1}^0 F(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{6}L$. 令

$$H(x) = \int_x^0 F(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f(0)x^2 + \frac{1}{6}Lx^3 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 0)$$

则 $H'(x) = -F(x) + f(0)x + \frac{1}{2}Lx^2$, $H''(x) = -F'(x) + f(0) + Lx$, $H'''(x) = -F''(x) + L$. 因 $H(0) = 0$, $H(-1) = \int_{-1}^0 F(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{6}L = 0$,应用罗尔定理,$\exists \eta_1 \in (-1,0)$,使得 $H'(\eta_1) = 0$;又因 $H'(0) = -F(0) = 0$,应用罗尔定理,$\exists \eta_2 \in (\eta_1,0)$,使得 $H''(\eta_2) = 0$;又因 $H''(0) = -F'(0) + f(0) = -f(0) + f(0) = 0$,应用罗尔定理,$\exists \eta_3 \in (\eta_2,0)$,使得 $H'''(\eta_3) = 0$,即 $L = F''(\eta_3)$. 于是

$$\int_{-1}^0 F(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{6}F''(\eta_3) \tag{4}$$

将(3)和(4)两式相加得

$$\int_{-1}^1 F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(F''(\xi_3) + F''(\eta_3)) \tag{5}$$

(3) 因为 $f''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续,所以 $F''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续. 应用最值定理,记 $m = \min\limits_{[-1,1]} F''(x)$, $M = \max\limits_{[-1,1]} F''(x)$,则 $m \leqslant \frac{1}{2}(F''(\xi_3) + F''(\eta_3))$

$\leqslant M$.故应用介值定理,$\exists\zeta\in(-1,1)$,使得 $F''(\zeta)=\dfrac{1}{2}(F''(\xi_2)+F''(\eta_2))$,于是有 $\dfrac{1}{6}(F''(\xi_2)+F''(\eta_2))=\dfrac{1}{3}F''(\zeta)$ 成立,代入(5)式得 $\int_{-1}^{1}F(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}F''(\zeta)$,即(2)式成立.

方法 2　因为 $f''(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上连续,所以 $F''(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上连续,应用马克劳林公式,存在 $\eta(x)$ 使得

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2!}F''(\eta(x))x^2=f(0)x+\frac{1}{2}F''(\eta(x))x^2$$

其中 $\eta(x)$ 介于 0 与 x 之间. 于是

$$\int_{-1}^{1}F(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(0)x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F''(\eta(x))x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F''(\eta(x))x^2\mathrm{d}x \quad (6)$$

应用最值定理,记 $m=\min\limits_{[-1,1]}F''(x)$, $M=\max\limits_{[-1,1]}F''(x)$,则 $m\leqslant F''(\eta(x))\leqslant M$,即

$$\frac{1}{2}mx^2\leqslant\frac{1}{2}F''(\eta(x))x^2\leqslant\frac{1}{2}Mx^2$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}mx^2\mathrm{d}x<\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F''(\eta(x))x^2\mathrm{d}x<\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}Mx^2\mathrm{d}x$$

即 $m\leqslant\dfrac{3}{2}\int_{-1}^{1}F''(\eta(x))x^2\mathrm{d}x\leqslant M$. 应用介值定理,$\exists\zeta\in(-1,1)$,使得 $F''(\zeta)=\dfrac{3}{2}\int_{-1}^{1}F''(\eta(x))x^2\mathrm{d}x$,即 $\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}F''(\eta(x))x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}F''(\zeta)$,代入(6)式得 $\int_{-1}^{1}F(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}F''(\zeta)$,即(2)式成立.

例 3.112(精选题)　设 $\lambda\in\mathbf{R}$,求证:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot x)^{\lambda}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

解析　作广义换元积分变换,令 $\tan x=t$,则

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^{\lambda}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^{\lambda})(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

令 $\cot x=t$,则

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot x)^{\lambda}}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^{0}\frac{-1}{(1+t^{\lambda})(1+t^2)}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^{\lambda})(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

故 $I_1=I_2$. 于是

$$I_1=\frac{1}{2}(I_1+I_2)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^\lambda}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot x)^\lambda}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^\lambda}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)^\lambda}{1+(\tan x)^\lambda}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+(\tan x)^\lambda}{1+(\tan x)^\lambda}dx=\frac{\pi}{4}$$

例 3.113(江苏省 2006 年竞赛题) 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上是导数连续的有界函数，$|f(x)-f'(x)|\leqslant 1$,求证：$|f(x)|\leqslant 1$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

解析 **方法 1** $\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$[e^{-x}f(x)]'=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$$

$$\Rightarrow\quad \int_x^{+\infty}[e^{-x}f(x)]'dx=e^{-x}f(x)\Big|_x^{+\infty}=-e^{-x}f(x)$$

$$=\int_x^{+\infty}e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx$$

$$\Rightarrow\quad e^{-x}|f(x)|\leqslant\int_x^{+\infty}e^{-x}|f'(x)-f(x)|dx\leqslant\int_x^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-x}$$

即 $|f(x)|\leqslant 1$.

方法 2 令 $F(x)=e^{-x}[f(x)+1]$,由题意 $-1\leqslant f'(x)-f(x)\leqslant 1$,所以

$$F'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)-1]\leqslant 0$$

因而 $F(x)$ 单调减，故

$$F(x)\geqslant\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+1}{e^x}=0$$

而 $e^{-x}>0$,故 $f(x)+1\geqslant 0$,即 $f(x)\geqslant -1$.

令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-1]$,由题意 $-1\leqslant f'(x)-f(x)\leqslant 1$,所以

$$G'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]\geqslant 0$$

因而 $G(x)$ 单调增，故

$$G(x)\leqslant\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-1}{e^x}=0$$

而 $e^{-x}>0$,故 $f(x)-1\leqslant 0$,即 $f(x)\leqslant 1$.

综上，$|f(x)|\leqslant 1$.

例 3.114(北京市 1992 年竞赛题) 求反常积分$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a,b>0)$.

解析 化为二次积分并交换积分次序，有

$$原式=\int_0^1\left(\int_a^b x^y dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^1 x^y dx\right)dy=\int_a^b\frac{1}{y+1}dy$$

$$=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

练习题三

1. 设 $f'(\ln x) = x^3, f(0) = 1$,求 $f(x)$.

2. 设 $f'(\sin^2 x) = 3\cos^2 x - 2\tan^2 x$,求 $f(x)$.

3. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$,求 $\displaystyle\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

4. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x(x-1)}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right]\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 2}}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$;　　(8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$;　　(10) $\displaystyle\int \max\{x, x^2, x^3\}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,满足 $f(x) = x^2\sin x + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

6. 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$　$(k > 0)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$,证明:存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$f(\xi) + f(1-\xi) = 0$$

8. 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$,其中 $n \in \mathbf{N}$.

9. 求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x$　$(a < b)$;　　(2) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \max\{x, x^2, x^3\}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^e \cos(\ln x)\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x+\cos x)^4}\mathrm{d}x$.

10. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

11. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{d}t$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

12. 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，证明：

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

13. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有连续的 2 阶导数，且有 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x$$

14. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上有连续的 2 阶导数，且有 $f'(0)=f'(1)$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{6}f''(\xi)$$

15. 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有连续的 2 阶导数，且有 $f'(a)=f'(b)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

16. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有连续的 2 阶导数，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)-\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

17. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，证明：$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$.（注：不能用已知的公式）

18. 设 $f(x)$ 在$[a,b](a>0)$上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，若对于$[a,b]$上任何一点都有 $f(x)\leqslant\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，求证：$\forall x\in[a,b]$，$f(x)\equiv 0$.

专题 4　多元函数微分学

4.1　基本概念与内容提要

4.1.1　二元函数的极限与连续性

1) 二元函数极限的定义

设二元函数 $f(x,y)$ 在(a,b)的某去心邻域U内有定义，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$时恒有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

则称

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = A$$

2) 在二元函数极限的定义中，动点(x,y)在(a,b)的邻近以任意路径趋向于点(a,b)时，函数值 $f(x,y)$ 与固定常数A需任意地接近. 这些任意路径是不可能一一取到的. 若取两条不同的路径让$(x,y) \to (a,b)$，而 $f(x,y)$ 取不同的极限，则可推知：$(x,y) \to (a,b)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

通常求二元函数极限的方法如下：(1) 利用定义求极限；(2) 在$(x,y) \to (0,0)$时化为极坐标求极限，即$(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \rho \to 0$；(3) 化为一元函数的极限；(4) 利用无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量；(5) 利用夹逼准则求极限.

3) 二元函数的连续性：若

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

则称 $f(x,y)$ 在(a,b) 内**连续**.

定理　多元初等函数在其定义域上每一点皆连续.

4) 有界闭域上的连续函数的性质：若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上为有界函数，$f(x,y)$ 在 D 上取到最大值与最小值.

4.1.2　偏导数与全微分

1) 偏导数的定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x'(a,b) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\square \to 0} \frac{f(a+\square,b) - f(a,b)}{\square} = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}=f_y'(a,b)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\square\to 0}\frac{f(a,b+\square)-f(a,b)}{\square}=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

这两式右端的极限存在,称 f 在 (a,b) **处可偏导**.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f_x'(0,0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\square\to 0}\frac{f(\square,0)-f(0,0)}{\square}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f_y'(0,0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\square\to 0}\frac{f(0,\square)-f(0,0)}{\square}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$$

这两式右端的极限存在,称 f 在 $(0,0)$ **处可偏导**.

2) $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可偏导时,$f(x,y)$ 在 (a,b) 处不一定连续.

3) 偏导数的几何意义

当 f 在 (a,b) 处对 x 可偏导时,$f_x'(a,b)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=b \end{cases}$ 在 (a,b) 的切线对 x 轴的斜率;

当 f 在 (a,b) 处对 y 可偏导时,$f_y'(a,b)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=a \end{cases}$ 在 (a,b) 的切线对 y 轴的斜率.

4) 全微分的定义:若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 的全增量 $\Delta f(x,y)$ 可写为

$$\Delta f(x,y)=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \tag{1}$$

这里 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则称 $f(x,y)$ **在 (a,b) 处可微**.

当 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微时,$f(x,y)$ 在 (a,b) 处必可偏导,且(1)式中 $A=f_x'(a,b)$,$B=f_y'(a,b)$.

当 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微时,$f(x,y)$ 在 (a,b) 处必连续.

当 $f_x'(x,y)$,$f_y'(x,y)$ 在 (a,b) 处连续时,$f(x,y)$ 在 (a,b) 处必可微(此时称 f 在 (a,b) 处连续可微).

当 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微时,称

$$\left.\mathrm{d}f(x,y)\right|_{a,b}\overset{\text{def}}{=}f_x'(a,b)\mathrm{d}x+f_y'(a,b)\mathrm{d}y \tag{2}$$

为 $f(x,y)$ **在 (a,b) 处的全微分**;当 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微时,称

$$\mathrm{d}f(x,y)\overset{\text{def}}{=}f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

为 $f(x,y)$ 的**全微分**.

由于多元初等函数的偏导数仍是多元初等函数,所以多元初等函数在其可偏导处必偏导数连续,因而必可微,其全微分公式(2)与(3)可直接使用.

4.1.3　多元复合函数与隐函数的偏导数

1) 多元复合函数的链锁法则

定理 1　设 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 处可微，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在 (x,y) 处可偏导，则 $z(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在 (x,y) 处可偏导，且有

$$\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}\varphi_x'(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}\psi_x'(x,y)\overset{\text{or}}{=}f_1'\cdot\varphi_x'+f_2'\cdot\psi_x'$$

$$\frac{\partial}{\partial y}z(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}\varphi_y'(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}\psi_y'(x,y)\overset{\text{or}}{=}f_1'\cdot\varphi_y'+f_2'\cdot\psi_y'$$

由于多元复合函数的情况很多，下面再列举几个求偏导数的链锁法则，其可偏导的条件略去.

(1) 若 $z=z(x,y)=f(x,y,u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则

$$\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)=f_x'+f_u'\cdot\varphi_x'+f_v'\cdot\psi_x'\overset{\text{or}}{=}f_1'+f_3'\cdot\varphi_x'+f_4'\cdot\psi_x'$$

$$\frac{\partial}{\partial y}z(x,y)=f_y'+f_u'\cdot\varphi_y'+f_v'\cdot\psi_y'\overset{\text{or}}{=}f_2'+f_3'\cdot\varphi_y'+f_4'\cdot\psi_y'$$

(2) 若 $z=z(x)=f(x,u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z(x)=f_x'+f_u'\cdot\varphi'+f_v'\cdot\psi'\overset{\text{or}}{=}f_1'+f_2'\cdot\varphi'+f_3'\cdot\psi'$$

这里左端的导数称为**全导数**.

2) 隐函数的偏导数

定理 2(隐函数存在定理 Ⅰ)　假设 $F(x,y)$ 在 (a,b) 的某邻域内连续可微，且 $F(a,b)=0$，$F_y'(a,b)\neq 0$，则存在 $x=a$ 的邻域 U 和惟一的函数 $y=f(x)(x\in U)$，使得

$$b=f(a),\quad \forall x\in U,\quad F(x,f(x))=0$$

这里 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且

$$f'(a)=-\frac{F_x'(a,b)}{F_y'(a,b)}$$

定理 3(隐函数存在定理 Ⅱ)　假设 $F(x,y,z)$ 在 (a,b,c) 的某邻域内连续可微，且 $F(a,b,c)=0$，$F_z'(a,b,c)\neq 0$，则存在 (a,b) 的邻域 U 和惟一的函数 $z=f(x,y)((x,y)\in U)$，使得

$$c=f(a,b),\quad \forall (x,y)\in U,\quad F(x,y,f(x,y))=0$$

这里 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可偏导，且

$$f_x'(a,b)=-\frac{F_x'(a,b,c)}{F_z'(a,b,c)},\quad f_y'(a,b)=-\frac{F_y'(a,b,c)}{F_z'(a,b,c)}$$

4.1.4 高阶偏导数

1) 函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 一般还是 x，y 的函数，若 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 可偏导时，有四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

对二阶偏导数继续求偏导数，即得三阶及三阶以上的偏导数. 二阶及二阶以上偏导数统称**高阶偏导数**.

2) 两个混合二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 不一定相等，但当 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x,y) 处连续时它们一定相等，即 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

3) 由于多元初等函数的两个二阶混合偏导数仍是多元初等函数，所以多元初等函数在其二阶偏导处两个二阶混合偏导数必连续，因此一定相等.

4.1.5 二元函数的极值

1) 可偏导的二元函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 取极值的必要条件是

$$f'_x(a,b)=0,\quad f'_y(a,b)=0$$

称点 (a,b) 为 $f(x,y)$ 的**驻点**.

2) 二元函数取极值的充分条件

若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处二阶偏导函数连续，(a,b) 是 $f(x,y)$ 的驻点，令

$$A=f''_{xx}(a,b),\quad B=f''_{xy}(a,b),\quad C=f''_{yy}(a,b)$$

(1) 当 $\Delta=B^2-AC<0, A>0$ 时，$f(a,b)$ 为极小值；

(2) 当 $\Delta=B^2-AC<0, A<0$ 时，$f(a,b)$ 为极大值；

(3) 当 $\Delta=B^2-AC>0$ 时，$f(a,b)$ 不是 f 的极值.

4.1.6 条件极值

1) 求函数 $z=f(x,y)$ 满足约束方程 $\varphi(x,y)=0$ 的极值，称为**条件极值**. 解决此问题有两种方法，一是由 $\varphi(x,y)=0$ 解出 $y=y(x)$（或 $x=x(y)$）代入函数 $f(x,y)$ 得到一元函数 $z(x)=f(x,y(x))$，利用一元函数求极值的方法解决；二是利用拉格朗日乘数法，其步骤如下.

(1) 作拉格朗日函数：令

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

(2) 求拉格朗日函数的驻点：由方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ F'_y = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ F'_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

解得驻点(a,b,λ_0).

(3) 如果原问题存在条件极大值(或条件极小值),而上述求得的拉格朗日函数 F 的驻点是惟一的,则 $f(a,b)$ 即为所求的条件极大值(或条件极小值);如果原问题既有条件极大值又有条件极小值,而上述求得的拉格朗日函数的驻点有两个,即(a_1,b_1,λ_1),(a_2,b_2,λ_2),则 $\max\{f(a_1,b_1),f(a_2,b_2)\}$ 即为所求的条件极大值,而 $\min\{f(a_1,b_1),f(a_2,b_2)\}$ 即为所求的条件极小值.

2) 求函数 $u=f(x,y,z)$ 满足约束方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 的极值,称为**条件极值**.解决此问题最好直接利用拉格朗日乘数法.其步骤如下:

(1) 作拉格朗日函数:令

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$$

(2) 求拉格朗日函数的驻点:由方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y,z) + \lambda\varphi'_x(x,y,z) = 0, \\ F'_y = f'_y(x,y,z) + \lambda\varphi'_y(x,y,z) = 0, \\ F'_z = f'_z(x,y,z) + \lambda\varphi'_z(x,y,z) = 0, \\ F'_\lambda = \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

解得驻点(a,b,c,λ_0).

(3) 对于函数值 $f(a,b,c)$ 进行与上述 $f(a,b)$ 完全相同的说明.

3) 求函数 $u=f(x,y,z)$ 满足两个约束方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 与 $\psi(x,y,z)=0$ 的极值,称为**条件极值**.解决此问题有两种方法.一是由 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 解出 $y=y(x)$,$z=z(x)$,代入函数 $f(x,y,z)$ 得到一元函数 $u(x)=f(x,y(x),z(x))$,利用一元函数求极值的方法解决;二是利用拉格朗日乘数法,其步骤如下:

(1) 作拉格朗日函数:令

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$$

(2) 求拉格朗日函数的驻点:由方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y,z) + \lambda\varphi'_x(x,y,z) + \mu\psi'_x(x,y,z) = 0, \\ F'_y = f'_y(x,y,z) + \lambda\varphi'_y(x,y,z) + \mu\psi'_y(x,y,z) = 0, \\ F'_z = f'_z(x,y,z) + \lambda\varphi'_z(x,y,z) + \mu\psi'_z(x,y,z) = 0, \\ F'_\lambda = \varphi(x,y,z) = 0, \\ F'_\mu = \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

解得驻点(a,b,c,λ_0,μ_0).

(3) 对于函数值 $f(a,b,c)$ 进行与上述 $f(a,b)$ 完全相同的说明.

4.1.7　多元函数的最值

设函数 f(二元函数或三元函数) 在有界闭域 G 上连续,应用最值定理,f 在 G 上存在最大值与最小值. 由于使函数 f 取得最值的点只可能是 f 在 G 的内部的驻点、或在 G 的边界上拉格朗日函数的驻点、或是 G 的边界上的端点,求出函数 f 在上述所有点的函数值,比较它们的大小,其中最大者为函数 f 在 G 上的最大值,其中最小者为函数 f 在 G 上的最小值(对上述这些点的函数值,无须逐一讨论取极大还是取极小或者不是极值).

4.2　竞赛题与精选题解析

4.2.1　求二元函数的极限(例 4.1—4.2)

例 4.1(江苏 2000 年竞赛题)　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x+y)}{x-y}$　(　　)

A. 等于 1　　B. 等于 0　　C. 等于 −1　　D. 不存在

解析　由于

$$\lim_{\substack{y=-x\\ x\to 0}}\frac{\sin(x+y)}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{2x}=0$$

$$\lim_{\substack{y=x-\sin x\\ x\to 0}}\frac{\sin(x+y)}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{x}=2-1=1$$

所以沿 $y=-x$ 与沿 $y=x-\sin x$ 让 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不同,因此原式极限不存在. 故选 D.

例 4.2(精选题)　设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. (1) 当 (x,y) 沿过原点的任一直线趋向于 $(0,0)$ 时,求 $f(x,y)$ 的极限;(2) 求证:$(x,y)\to(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

解析　(1) 沿着 y 轴,$y\to 0$ 时

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

沿着 $y=kx\,(k\neq 0)$,$(x,y)\to(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$$

沿着 x 轴,$x\to 0$ 时

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0$$

所以(x,y)沿着过原点的任意直线趋向于$(0,0)$时$f(x,y)\to 0$.

(2) 沿着抛物线$y=x^2$,$(x,y)\to(0,0)$时

$$\lim_{\substack{y=x^2\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}\neq 0$$

所以$(x,y)\to(0,0)$时$f(x,y)$的极限不存在.

4.2.2　二元函数的连续性、可偏导性与可微性(例 4.3—4.9)

例 4.3(江苏省 2000 年竞赛题)　若$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$和$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$都存在,则$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$　　(　　)

A. 极限存在但不一定连续　　B. 极限存在且连续

C. 沿任意方向的方向导数存在　　D. 极限不一定存在,也不一定连续

解析　应用二元函数在某点极限存在与可偏导之间无因果关系的结论,A,B皆错. C 显见是错的,故选 D.

例 4.4(江苏省 2008 年竞赛题)　设

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

试讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性、可偏导性、可微性.

解析　由于

$$\lim_{\substack{y=x^2\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+x^4}+\frac{x^4}{2x^4}\right)=\frac{1}{2}$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)\neq 0=f(0,0)$,于是$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$与$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{|y|}{y}$皆不存在,故$f(x,y)$在$(0,0)$处不可偏导.

由于连续性与可偏导性皆是可微性的必要条件,故$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

例 4.5(江苏省 2002 年竞赛题)　设

$$f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

试讨论$f(x,y)$在点$(0,0)$的连续性、可偏导性与可微性.

解析　因$\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$有界,所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 因为

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2}$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

下面考虑可微性. 令

$$\Delta f(0,0)=f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\omega$$

则 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0+$ 时

$$\frac{\omega}{\rho}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}\right)\to 0\quad\left(因\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1\right)$$

所以 $\omega=o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

例 4.6（江苏省 2006 年竞赛题） 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，并求 $\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(0,0)}$.

解析 根据题意可得

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x^2}{x^3}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y\tan y^2}{y^3}=-1$$

令

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\omega\\&=x-y+\omega\end{aligned}$$

因

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\omega}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho(\cos\theta-\sin\theta)\left(\dfrac{\tan\rho^2}{\rho^2}-1\right)}{\rho}=0$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(0,0)}=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

例 4.7（江苏省 2000 年竞赛题） 已知 $z=uv$，且 $x=\mathrm{e}^u\cos v$，$y=\mathrm{e}^u\sin v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解析 由 $x=\mathrm{e}^u\cos v$，$y=\mathrm{e}^u\sin v$ 解得

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \quad v = \arctan\frac{y}{x}$$

于是 $z = uv = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\arctan\frac{y}{x}$，因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\cdot\frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\frac{x}{x^2 + y^2}$$

例 4.8(江苏省 1996 年竞赛题)　函数 $u = xy^2z^3$ 在点 $(1,2,-1)$ 处沿曲面 $x^2 + y^2 = 5$ 的外法向的方向导数为________.

解析　已知 $F = x^2 + y^2 - 5$，$\boldsymbol{n} = 2(x,y,0)$，点 $P(1,2,-1)$，故曲面在点 P 的外法向的方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\gamma = 0$. 又因

$$u'_x(P) = y^2z^3\Big|_{(1,2,-1)} = -4$$

$$u'_y(P) = 2xyz^3\Big|_{(1,2,-1)} = -4$$

$$u'_z(P) = 3xy^2z^2\Big|_{(1,2,-1)} = 12$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} &= u'_x(P)\cos\alpha + u'_y(P)\cos\beta + u'_z(P)\cos\gamma \\ &= -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}} + 0 = -\frac{12}{5}\sqrt{5}\end{aligned}$$

例 4.9(全国大学生 2015 年决赛题)　设 $\boldsymbol{l}_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是平面上点 P_0 处的 $n(n \geqslant 2)$ 个方向向量，相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$，若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续的偏导数，证明：$\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j} = 0$.

解析　设

$$\boldsymbol{l}_j^0 = \left(\cos\left(\alpha + j\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\alpha + j\frac{2\pi}{n}\right)\right) \quad (\alpha \in [0,\pi);\ j = 1,2,\cdots,n)$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cdot\cos\left(\alpha + j\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cdot\sin\left(\alpha + j\frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cdot\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\alpha + j\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cdot\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\alpha + j\frac{2\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\cos\alpha \cdot \cos\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\alpha \cdot \sin\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$+ \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\sin\alpha \cdot \cos\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\alpha \cdot \sin\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n}\cos\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n}\sin\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$+ \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \cdot \left(\sin\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n}\cos\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n}\sin\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

由于

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \sum_{j=1}^{n}\cos\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\sin(2j+1)\frac{\pi}{n} - \sin(2j-1)\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \left(\sin(2n+1)\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sin\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \sum_{j=1}^{n}\sin\left(j\,\frac{2\pi}{n}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\cos(2j-1)\frac{\pi}{n} - \cos(2j+1)\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos(2n+1)\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n}\right) = 0$$

所以$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j} = 0$.

4.2.3 求多元复合函数与隐函数的偏导数(例 4.10—4.22)

例 4.10(江苏省2004年竞赛题) 设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2$，$f'_x(1,2)=3$，$f'_y(1,2)=4$，$\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，则 $\varphi'(1)=$ ________.

解析　应用多元复合函数的链锁法则，有

$$\varphi'(x) = f_1' + f_2' \cdot (f_1' + 2f_2')$$

因 $f(1,f(1,2)) = f(1,2)$，$f_1'(1,2) = f_x'(1,2) = 3$，$f_2'(1,2) = f_y'(1,2) = 4$，故

$$\begin{aligned}\varphi'(1) &= f_1'(1,2) + f_2'(1,2) \cdot [f_1'(1,2) + 2f_2'(1,2)] \\ &= 3 + 4 \cdot (3+8) = 47\end{aligned}$$

例 4.11（江苏省 2012 年竞赛题）　已知函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$f(x,y)$ 皆可微，设 $z = f(\varphi(x+y),\psi(xy))$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ________.

解析　应用多元复合函数的链锁法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(\varphi(x+y),\psi(xy)) \cdot \varphi'(x+y) + yf'_2(\varphi(x+y),\psi(xy)) \cdot \psi'(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1(\varphi(x+y),\psi(xy)) \cdot \varphi'(x+y) + xf'_2(\varphi(x+y),\psi(xy)) \cdot \psi'(xy)$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)f'_2(\varphi(x+y),\psi(xy)) \cdot \psi'(xy)$$

例 4.12（江苏省 2016 年竞赛题）　设函数 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数，且 $F'_u \cdot F'_v > 0$，函数 $y = f(x)$ 由 $F\left(\ln x - \ln y, \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) = 0$ 确定，试求全导数 $f'(x)$.

解析　**方法 1**　应用隐函数求导公式与复合函数求导公式得

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{(1/x) \cdot F'_u + (1/y + y/x^2)F'_v}{(-1/y) \cdot F'_u + (-1/x - x/y^2)F'_v} \\ &= \frac{xy^2(xyF'_u + (x^2+y^2)F'_v)}{x^2y(xyF'_u + (x^2+y^2)F'_v)} = \frac{y}{x} \quad (\text{因 } xyF'_u + (x^2+y^2)F'_v \neq 0)\end{aligned}$$

方法 2　应用复合函数求导公式，原式两边对 x 求导数得

$$F'_u \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}y'\right) + F'_v \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}y'\right) = 0$$

化简得$\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}y'\right)\left(F'_u + \dfrac{x^2+y^2}{xy}F'_v\right) = 0$，因为 $F'_u + \dfrac{x^2+y^2}{xy}F'_v \neq 0$，所以 $y' = \dfrac{y}{x}$.

例 4.13（江苏省 1998 年竞赛题）　设变量 x,y,t 满足 $y = f(x,t)$ 及$F(x,y,t) = 0$，且函数 f,F 的一阶偏导数连续，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$ ________________.

解析　由方程组 $y = f(x,t)$，$F(x,y,t) = 0$ 确定 y,t 是 x 的一元函数，即有 $y(x)$，$t(x)$. 方程两边对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'_x + f'_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\quad F'_x + F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F'_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$$

两式联立消$\frac{dt}{dx}$,得$\frac{dy}{dx}=\frac{f_x'F_t'-f_t'F_x'}{F_t'+f_t'F_y'}$.

例 4.14(江苏省 2000 年竞赛题)　设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定(F 为任意可微函数),则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

解析　应用隐函数求偏导数法则,令 $f(x,y,z)=F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x'}{f_z'}=-\frac{-\frac{y}{x^2}F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{x}F_2'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y'}{f_z'}=-\frac{\frac{1}{x}F_1'}{\frac{1}{x}F_2'}=-\frac{F_1'}{F_2'}$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=z$$

例 4.15(江苏省 2006 年竞赛题)　已知由 $x=ze^{y+z}$ 可确定 $z=z(x,y)$,则 $dz(e,0)=$ ________________.

解析　$x=e$, $y=0$ 时,由 $e=ze^z$,故 $z(e,0)=1$. 令 $F=ze^{y+z}-x$,则由隐函数求偏导数公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{-1}{e^{y+z}(1+z)}=\frac{1}{e^{y+z}(1+z)}=\frac{z}{x(1+z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{ze^{y+z}}{e^{y+z}(1+z)}=-\frac{z}{1+z}$$

令 $x=e$, $y=0$, $z=1$ 代入得$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}$, $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(e,0)}=\frac{-1}{2}$,于是

$$dz(e,0)=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(e,0)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(e,0)}dy=\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$$

例 4.16(南京大学 1996 年竞赛题)　设 $y=f(x,t)$,而 t 是由方程 $G(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数,其中 f,G 可微,求$\frac{dy}{dx}$.

解析　令 $F(x,y,t)=f(x,t)-y=0$,则由

$$\begin{cases}F(x,y,t)=0,\\G(x,y,t)=0\end{cases}\qquad(*)$$

确定 $y=y(x)$, $t=t(x)$. 方程式($*$)两边对 x 求导得

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \dfrac{dy}{dx} + F'_t \dfrac{dt}{dx} = f'_x - \dfrac{dy}{dx} + f'_t \dfrac{dt}{dx} = 0, \\ G'_x + G'_y \dfrac{dy}{dx} + G'_t \dfrac{dt}{dx} = 0 \end{cases}$$

由此可解得$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{G'_t f'_x - G'_x f'_t}{G'_y f'_t + G'_t}$.

例 4.17(江苏省 2000 年竞赛题)　假设 $u = u(x,y)$ 由方程 $u = f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t) = 0$ 和 $h(z,t) = 0$ 确定(f,g,h 均为可微函数)，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解析　首先由$\begin{cases} g(y,z,t) = 0, \\ h(z,t) = 0 \end{cases}$确定 $z = z(y)$，$t = t(y)$. 方程组对 y 求导数得

$$\begin{cases} g'_y + g'_z \cdot z'(y) + g'_t \cdot t'(y) = 0, \\ h'_z \cdot z'(y) + h'_t \cdot t'(y) = 0 \end{cases}$$

由此解得

$$z'(y) = \frac{-g'_y \cdot h'_t}{g'_z \cdot h'_t - g'_t \cdot h'_z},\quad t'(y) = \frac{g'_y \cdot h'_z}{g'_z \cdot h'_t - g'_t \cdot h'_z}$$

应用复合函数求偏导数法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x + f'_z \cdot 0 + f'_t \cdot 0 = f'_x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= f'_y + f'_z \cdot z'(y) + f'_t \cdot t'(y) \\ &= f'_y + \frac{-f'_z \cdot g'_y \cdot h'_t + f'_t \cdot g'_y \cdot h'_z}{g'_z \cdot h'_t - g'_t \cdot h'_z} \end{aligned}$$

例 4.18(江苏省 1994 年竞赛题)　设 z 是由方程组$\begin{cases} x = (t+1)\cos z, \\ y = t\sin z \end{cases}$确定的隐函数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______.

解析　在方程组$\begin{cases} x = (t+1)\cos z, \\ y = t\sin z \end{cases}$中将 x，y 视为自变量，将 z，t 视为隐函数，方程组两边对 x 求偏导，有

$$\begin{cases} \cos z \cdot \dfrac{\partial t}{\partial x} - (t+1)\sin z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = 1, & (1) \\ \sin z \cdot \dfrac{\partial t}{\partial x} + t\cos z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) 式乘以 $\sin z$ 减去(2) 式乘以 $\cos z$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\sin z}{(1+t)\sin^2 z + t\cos^2 z} = \frac{-\tan^2 z}{y + x\tan^3 z}$$

例 4.19(江苏省2012年竞赛题)　设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上可微,线段 PQ 位于 D 内,已知点 P,Q 的坐标分别为 $P(a,b),Q(x,y)$,求证:在线段 PQ 上存在点 $M(\xi,\eta)$,使得

$$f(x,y)=f(a,b)+f'_x(\xi,\eta)(x-a)+f'_y(\xi,\eta)(y-b)$$

解析　令 $F(t)=f(a+t(x-a),b+t(y-b))$,则 $F(t)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,应用拉格朗日中值定理,必$\exists\theta\in(0,1)$,使得

$$F(1)-F(0)=F'(\theta)(1-0)=F'(\theta) \qquad (*)$$

因为

$$F'(t)=f'_x(a+t(x-a),b+t(y-b))(x-a)$$
$$+f'_y(a+t(x-a),b+t(y-b))(y-b)$$

令 $\xi=a+\theta(x-a),\eta=b+\theta(y-b)$,点 $M(\xi,\eta)$ 显然位于线段 PQ 上,则

$$F'(\theta)=f'_x(\xi,\eta)(x-a)+f'_y(\xi,\eta)(y-b)$$

又 $F(0)=f(a,b),F(1)=f(x,y)$,代入(*)式得

$$f(x,y)=f(a,b)+f'_x(\xi,\eta)(x-a)+f'_y(\xi,\eta)(y-b)$$

例 4.20(北京市2000年竞赛题)　设 $u=f(x,y,z)$,f 是可微函数,若$\dfrac{f'_x}{x}=\dfrac{f'_y}{y}=\dfrac{f'_z}{z}$,证明:$u$ 仅为 r 的函数,已知 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解析　令 $x=r\cos\theta\cdot\sin\varphi,y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi,z=r\cos\varphi$,则有

$$u=f(r\cos\theta\cdot\sin\varphi,r\sin\theta\cdot\sin\varphi,r\cos\varphi)$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot f'_x+r\cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot f'_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=r\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot f'_x+r\sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot f'_y-r\sin\varphi\cdot f'_z$$

由$\dfrac{f'_x}{x}=\dfrac{f'_y}{y}=\dfrac{f'_z}{z}$得

$$\frac{f'_x}{r\cos\theta\cdot\sin\varphi}=\frac{f'_y}{r\sin\theta\cdot\sin\varphi}=\frac{f'_z}{r\cos\varphi}=\lambda$$

代入$\dfrac{\partial u}{\partial\theta},\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$有$\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\equiv0,\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\equiv0$,从而得证 u 仅为 r 的函数.

例 4.21(浙江省2002年竞赛题)　设二元函数 $f(x,y)$ 有一阶连续的偏导数,且 $f(0,1)=f(1,0)$,证明:单位圆周上至少存在两点满足方程

$$y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)-x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$$

解析　令 $g(t)=f(\cos t,\sin t)$，则 $g(t)$ 一阶连续可导，且 $g(0)=f(1,0)$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0,1)$，$g(2\pi)=f(1,0)$，所以 $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(2\pi)$．分别在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\xi_2\in\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$，使得

$$g'(\xi_1)=0,\quad g'(\xi_2)=0$$

记 $(x_1,y_1)=(\cos\xi_1,\sin\xi_1)$，$(x_2,y_2)=(\cos\xi_2,\sin\xi_2)$，由于

$$g'(t)=-\sin t\frac{\partial}{\partial x}f(\cos t,\sin t)+\cos t\frac{\partial}{\partial y}f(\cos t,\sin t)$$

所以

$$-\sin\xi_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(\cos\xi_i,\sin\xi_i)}+\cos\xi_i\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(\cos\xi_i,\sin\xi_i)}=0$$

即

$$y_i\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_i,y_i)}-x_i\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_i,y_i)}=0\quad(i=1,2)$$

例 4.22（北京市 1995 年竞赛题）　已知 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，设 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，$\psi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$，对函数 $\psi=\psi(u,v)$，求证：$\frac{\partial\psi}{\partial u}=0$．

解析　由 $u=x$，$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$，有 $x=u$，$y=\frac{u}{uv+1}$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial u}&=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{x^2}+\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\\&=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2z^2}\left(x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0\end{aligned}$$

4.2.4　求高阶偏导数(例 4.23—4.32)

例 4.23（全国大学生 2010 年预赛题）　已知函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$．

解析　应用复合函数求偏导数法则得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f\left(\frac{1}{r}\right)=f'\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=f'\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{3x}{r^4}\frac{x}{r}f'\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{x}{r^3}f''\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r}$$
$$=\frac{3x^2-r^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)$$

应用对称性得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{3y^2-r^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{y^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)$$

于是

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{3x^2-r^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{3y^2-r^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{y^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$=\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)$$

例 4.24(浙江省 2009 年竞赛题)　设 g 二阶可导，f 具有二阶连续偏导数，$z=g(xf(x+y,2y))$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

解析　应用多元复合函数的链锁法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g'\cdot(f+xf'_1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g''\cdot x(f'_1+2f'_2)(f+xf'_1)+g'\cdot[f'_1+2f'_2+x(f''_{11}+2f''_{12})]$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(f+xf'_1)(f'_1+2f'_2)g''+[f'_1+2f'_2+x(f''_{11}+2f''_{12})]g'$$

例 4.25(北京市 1990 年竞赛题)　设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

试求函数 f 的表达式.

解析　令 $t=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\cdot\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(t)\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

同理可得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，代入原方程得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

即得 $f''(t)=(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}=\mathrm{e}^{5t}$，积分两次得

$$f(t)=\frac{1}{25}\mathrm{e}^{5t}+C_1t+C_2$$

例 4.26（江苏省 1998 年竞赛题）　已知函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数皆连续，且

$$f''_{xx}(x,y)=f''_{yy}(x,y),\quad f(x,2x)=x^2,\quad f'_x(x,2x)=x$$

试求 $f''_{xx}(x,2x)$ 与 $f''_{xy}(x,2x)$.

解析　在等式 $f(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求全导数得

$$f'_x(x,2x)+2f'_y(x,2x)=2x$$

两边再对 x 求全导数得

$$f''_{xx}(x,2x)+2f''_{xy}(x,2x)+2f''_{yx}(x,2x)+4f''_{yy}(x,2x)=2$$

由条件得

$$5f''_{xx}(x,2x)+4f''_{xy}(x,2x)=2$$

在 $f'_x(x,2x)=x$ 两边对 x 求全导数得

$$f''_{xx}(x,2x)+2f''_{xy}(x,2x)=1$$

将上两式联立解得 $f''_{xx}(x,2x)=0$，$f''_{xy}(x,2x)=\dfrac{1}{2}$.

例 4.27（江苏省 2008 年竞赛题）　已知函数 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，算子 A 定义为 $A(u)=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.（1）求 $A(u-A(u))$；（2）利用结论（1），以 $\xi=\dfrac{y}{x}$，$\eta=x-y$ 为新的自变量，改变方程 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的形式.

解析　(1)
$$\begin{aligned}A(u-A(u))&=A\left(u-x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=x\frac{\partial}{\partial x}\left(u-x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(u-x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=x\left(-x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+y\left(-x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&=-\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

(2) 由 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Leftrightarrow A(u-A(u))=0$，又

$$A(u)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]+y\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{x}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}=\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$A(u-A(u))=A\left(u-\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u-\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=\eta\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}-\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=-\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

于是原方程化为$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$.

例 4.28(精选题)　设函数 $u=u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数,且满足方程

$$\mathbf{div}(\mathbf{grad}u)-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

(1) 用变量代换 $\xi=x-y,\eta=x+y$ 将上述方程化为以 ξ,η 为自变量的方程;

(2) 已知 $u(x,2x)=x,u'_x(x,2x)=x^2$,求 $u(x,y)$.

解析　(1) $\mathbf{div}(\mathbf{grad}u)=\mathbf{div}(u'_x,u'_y)=u''_{xx}+u''_{yy}$,于是原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{3}$$

将(2)式与(3)式代入(1)式得$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$.

(2) 将方程$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$两边对 η 积分得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\varphi(\xi)\quad(\varphi(\xi)\text{ 为 }\xi\text{ 的任意可微函数})$$

此式两边对 ξ 积分得

$$u=\int\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+g(\eta)=f(\xi)+g(\eta)$$

这里 f,g 为任意可微函数. 于是

$$u(x,y)=f(x-y)+g(x+y) \tag{4}$$

由条件 $u(x,2x)=x$ 得

$$f(-x)+g(3x)=x \tag{5}$$

(4) 式两边对 x 求偏,导得

$$u'_x=f'(x-y)+g'(x+y)$$

由条件 $u'_x(x,2x)=x^2$ 得

$$u'_x(x,2x)=f'(-x)+g'(3x)=x^2 \tag{6}$$

(6) 式两边对 x 积分得

$$-3f(-x)+g(3x)=x^3+C \tag{7}$$

联立(5) 式与(7) 式解得

$$f(-x)=\frac{1}{4}(x-x^3)-\frac{1}{4}C,\quad g(3x)=\frac{1}{4}(3x+x^3)+\frac{1}{4}C$$

由此可得

$$f(x)=\frac{1}{4}(x^3-x)-\frac{1}{4}C,\quad g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{108}x^3+\frac{1}{4}C$$

于是由(4) 式可得所求函数为

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{4}[(x-y)^3-(x-y)]-\frac{1}{4}C+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{1}{108}(x+y)^3+\frac{1}{4}C\\&=\frac{1}{4}(x-y)^3+\frac{1}{108}(x+y)^3+\frac{1}{2}y\end{aligned}$$

例 4.29(北京市 2002 年竞赛题)　设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$,证明:对任意常数 C,$f(x,y)=C$ 为一直线的充要条件是

$$(f'_y)^2f''_{xx}-2f'_xf'_yf''_{xy}+f''_{yy}(f'_x)^2=0$$

解析　先证必要性.若 $f(x,y)=C$ 为一直线,则 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 均为常数,故 $f''_{xx}=f''_{xy}=f''_{yy}=0$,从而等式成立.

再证充分性.设由 $f(x,y)=C$ 确定隐函数 $y=y(x)$,于是 $f(x,y(x))\equiv 0$,两边对 x 求导得 $f'_x+f'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,两边再对 x 求导得

$$f''_{xx}+f''_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(f''_{yx}+f''_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f'_y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$$

因为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f'_x}{f'_y}$,代入上式得

$$f''_{xx}-\frac{2f'_x f''_{xy}}{f'_y}+\frac{f''_{yy}(f'_x)^2}{(f'_y)^2}+f'_y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0$$

由条件得

$$f'_y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0,\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0$$

积分得 $y=C_1x+C_2$(C_1,C_2 为常数),从而 $f(x,y)=0$ 为一直线.

例 4.30(全国大学生 2011 年初赛题)　设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$$

确定的隐函数,且具有连续的二阶偏导数,求证:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1,\quad x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$$

解析　记 $f(x,y,z)=F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)$,应用隐函数求偏导数法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}=-\frac{1}{F'_1+F'_2}\left(-\frac{1}{x^2}F'_1\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}=-\frac{1}{F'_1+F'_2}\left(\frac{1}{y^2}F'_2\right)$$

于是

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_1}{F'_1+F'_2}+\frac{F'_2}{F'_1+F'_2}=1$$

此式两端分别对 x,y 求偏导数得

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \tag{1}$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

(1) 式乘 x 加上(2) 式乘 y 得

$$\begin{aligned}
&2x^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-xy^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y^2\frac{\partial z}{\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\
&=x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&=x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0
\end{aligned}$$

例 4.31(南京大学 1995 年竞赛题)　若 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$,求$\left.\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}\right|_{(2,1)}$.

解析　因 $u=1+\dfrac{2y}{x-y}$,所以

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=(-1)^m\frac{m!2y}{(x-y)^{m+1}}=-2\cdot m!\frac{y-x+x}{(y-x)^{m+1}}$$

$$=-2\cdot m!\cdot\left[\frac{1}{(y-x)^m}+\frac{x}{(y-x)^{m+1}}\right]$$

由于

$$\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^m\partial y}=-2\cdot m!\cdot\left[\frac{-m}{(y-x)^{m+1}}+\frac{-(m+1)x}{(y-x)^{m+2}}\right]$$

$$\frac{\partial^{m+2}u}{\partial x^m\partial y^2}=-2\cdot m!\cdot\left[(-1)^2\frac{m(m+1)}{(y-x)^{m+2}}+(-1)^2\frac{(m+1)(m+2)x}{(y-x)^{m+3}}\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=-2\left[(-1)^n\frac{m\cdot(m+n-1)!}{(y-x)^{m+n}}+(-1)^n\frac{(m+n)!x}{(y-x)^{m+n+1}}\right]$$

所以

$$\left.\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}\right|_{(2,1)}=-2\left[(-1)^n\frac{m\cdot(m+n-1)!}{(-1)^{m+n}}+(-1)^n\frac{2\cdot(m+n)!}{(-1)^{m+n+1}}\right]$$

$$=2(-1)^m(m+n-1)!(2m+2n-m)$$

$$=2(-1)^m(m+n-1)!(m+2n)$$

例 4.32(清华大学 1985 年竞赛题)　求

$$\int_0^x\left(1+(x-t)+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{nt}\,dt$$

对 x 的 n 阶导数.

解析　令 $f_k(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}e^{nt}\,dt$,则

$$\int_0^x\left(1+(x-t)+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{nt}\,dt=f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x)$$

应用莱布尼兹公式[1]得 $f_k'(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{nt}\,dt=f_{k-1}(x)$,于是

①莱布尼兹公式:设 $\varphi(x)$ 可导,$f_x'(x,t)$ 连续,则有

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\varphi(x)}f(x,t)dt\right)=\varphi'(x)f(x,\varphi(x))+\int_a^{\varphi(x)}f_x'(x,t)dt$$

$$f_k''(x)=f_{k-1}'(x)=f_{k-2}(x),\quad \cdots,\quad f_k^{(k)}(x)=f_0(x)\quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

由于 $f_0'(x)=\left(\int_0^x e^{nt}\,dt\right)'=e^{nx}$，$f_0''(x)=ne^{nx}$，$\cdots$，$f_0^{(n)}(x)=n^{n-1}e^{nx}$，所以

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_0^x\left(1+(x-t)+\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{nt}\,dt\right)\\
&=f_0^{(n)}(x)+f_1^{(n)}(x)+\cdots+f_{n-1}^{(n)}(x)\\
&=f_0^{(n)}(x)+(f_1'(x))^{(n-1)}+(f_2''(x))^{(n-2)}+\cdots+(f_{n-1}^{(n-1)}(x))'\\
&=f_0^{(n)}(x)+f_0^{(n-1)}(x)+f_0^{(n-2)}(x)+\cdots+f_0'(x)\\
&=(n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots+n+1)e^{nx}
\end{aligned}$$

4.2.5 求二元函数的极值(例 4.33—4.37)

例 4.33(江苏省2000年竞赛题)　已知函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$，其在点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处取　　　　　　　　（　　）

A. 极大值 $-\frac{e}{2}$　　B. 极小值 $-\frac{e}{2}$　　C. 不取得极值　　D. 极小值 e

解析　由

$$\begin{cases}f_x'=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0,\\ f_y'=e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}$$

解得驻点为 $P\left(\frac{1}{2},-1\right)$. $A=f_{xx}''(P)=2e$，$B=f_{xy}''(P)=0$，$C=f_{yy}''(P)=2e$.

$\Delta=B^2-AC=-4e^2<0$，又 $A>0$，所以 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$ 为极小值. 故选 B.

例 4.34(江苏省2006年竞赛题)　函数 $f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$ 中常数 a，b 满足条件__________时，$f(-1,0)$ 为其极大值.

解析　应用二元函数取极值的必要条件得

$$\begin{cases}f_x'(-1,0)=e^{-x}(-ax-b+y^2+a)\Big|_{(-1,0)}=e(2a-b)=0,\\ f_y'(-1,0)=-2ye^{-x}\Big|_{(-1,0)}=0\end{cases}$$

所以 $b=2a$. 由于

$$A=f_{xx}''(-1,0)=e^{-x}(ax+b-y^2-2a)\Big|_{(-1,0)}=e(-3a+b)$$

$$B=f_{xy}''(-1,0)=2ye^{-x}\Big|_{(-1,0)}=0$$

$$C=f_{yy}''(-1,0)=-2e^{-x}\Big|_{(-1,0)}=-2e$$

$$\Delta=B^2-AC=2e^2(-3a+b)$$

令 $\Delta<0$，$A<0$，解得 $a>0$，$b=2a$ 为所求条件. 当 $a<0$ 时推得 $\Delta>0$，此时函数

f 在 $(-1,0)$ 不取极值；当 $a=0,b=0$ 时推得 $\Delta=0$，此时 $f(x,y)=-y^2e^{-1}\leqslant f(-1,0)=0$，故 $f(-1,0)$ 也是极大值. 于是 $a\geqslant 0,b=2a$ 为所求.

例 4.35（南京大学 1993 年竞赛题） 求曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{x},\\ y=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x+2y-3=0,\\ z=0\end{cases}$ 的距离.

解析 设 $A(p,q,r)$ 与 $B(u,v,w)$ 分别为两曲线上的任意点，F 为 A,B 两点距离的平方，于是

$$F=(p-u)^2+(q-v)^2+(r-w)^2$$

由条件知 $r=\sqrt{p}$，$q=0$，$u=3-2v$，$w=0$，代入上式得

$$F=(p-3+2v)^2+v^2+p$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial p}=2(p-3+2v)+1=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial v}=4(p-3+2v)+2v=0\end{cases}$$

可解得惟一驻点 $(p,v)=\left(\frac{1}{2},1\right)$. 从几何意义知 F 的最小值存在，故在两曲线上对应的点 $\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $(1,1,0)$ 之间的距离最小，其值为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$，即两曲线的距离为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

例 4.36（北京市 1993 年竞赛题） 求使函数

$$f(x,y)=\frac{1}{y^2}\exp\left\{-\frac{1}{2y^2}\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]\right\}\quad(y\neq 0,b>0)$$

达到最大值的 (x_0,y_0) 以及相应的 $f(x_0,y_0)$.

解析 **方法 1** 记 $g(x,y)=\ln f(x,y)$，则

$$g(x,y)=-2\ln|y|-\frac{1}{2y^2}\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]$$

且 $g(x,y)$ 与 $f(x,y)$ 有相同的极大值点. 由于

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}(x-a)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^3}\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]-\frac{1}{y^2}(y-b)$$

令 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=0$，$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=0$，解得驻点 $(x_1,y_1)=\left(a,\frac{b}{2}\right)$，$(x_2,y_2)=(a,-b)$.

当 $y>0$ 时，因为

$$A_1=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\bigg|_{(a,\frac{b}{2})}=-\frac{1}{b^2}<0$$

$$B_1=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right|_{(a,\frac{b}{2})}=0,\quad C_1=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|_{(a,\frac{b}{2})}=-\frac{24}{b^2}$$

因 $\Delta=B_1^2-A_1C_1=-\frac{96}{b^4}<0$，故 $f(x,y)$ 在 $\left(a,\frac{b}{2}\right)$ 点达到极大值，有 $f\left(a,\frac{b}{2}\right)=\frac{4}{b^2\sqrt{e}}$. 在半平面 $y>0$ 上，$f(x,y)$ 可微，且驻点惟一，故 $f\left(a,\frac{b}{2}\right)=\frac{4}{b^2\sqrt{e}}$ 是 $f(x,y)$ 在 $y>0$ 上的最大值.

当 $y<0$ 时，因为

$$A_2=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_{(a,-b)}=-\frac{1}{b^2}<0$$

$$B_2=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right|_{(a,-b)}=0,\quad C_2=\left.\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|_{(a,-b)}=-\frac{3}{b^2}$$

因 $\Delta=B_2^2-A_2C_2=-\frac{3}{b^4}<0$，同理可得 $f(a,-b)=\frac{1}{b^2e^2}$ 是 $f(x,y)$ 在 $y<0$ 上的最大值.

综上，由于 $f\left(a,\frac{b}{2}\right)=\frac{4}{b^2\sqrt{e}}>f(a,-b)=\frac{1}{b^2e^2}$，因此 $f\left(a,\frac{b}{2}\right)=\frac{4}{b^2\sqrt{e}}$ 是函数 $f(x,y)$ 的最大值.

方法 2 驻点 $(x_1,y_1)=\left(a,\frac{b}{2}\right)$，$(x_2,y_2)=(a,-b)$ 的求法同方法 1.

当 $y\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 可微. $\forall c\in\mathbf{R}$，当 $(x,y)\to(c,0)$ 时，由于

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{y^2}\exp\left\{-\frac{1}{2y^2}(y-b)^2\right\}=\frac{1}{y^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{y}\right)^2\right\}=t^2e^{-\frac{(bt-1)^2}{2}}$$

其中 $t=\frac{1}{y}$，且 $y\to 0$ 时，$t\to\infty$. 令 $h(t)=t^2e^{-\frac{(bt-1)^2}{2}}$，应用洛必达法则，有

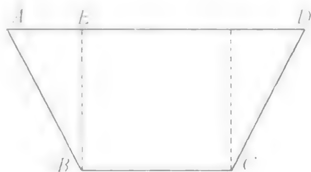
$$\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{\frac{1}{2}(bt-1)^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{b(bt-1)e^{\frac{1}{2}(bt-1)^2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{(b^2(bt-1)^2+b^2)e^{\frac{1}{2}(bt-1)^2}}=0$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(c,0)}f(x,y)=0$，又显然 $\lim\limits_{\rho\to+\infty}f(x,y)=0\,(\rho=\sqrt{x^2+y^2})$，于是

$$\max f(x,y)=\max\left\{f\left(a,\frac{b}{2}\right),f(a,-b),0\right\}=\max\left\{\frac{4}{b^2\sqrt{e}},\frac{1}{b^2e^2},0\right\}=\frac{4}{b^2\sqrt{e}}$$

例 4.37（江苏省 2010 年竞赛题） 如图，$ABCD$ 是等腰梯形，$BC\,/\!/\,AD$，$AB+BC+CD=8$，求 AB，BC，AD 的长，使该梯形绕 AD 旋转一周所得旋转体的体积最大.



解析　令 $BC = x, AD = y(0 < x < y < 8)$[①]，则 $AB = \frac{8-x}{2}$. 设 $BE \perp AD$，则

$$AE = \frac{y-x}{2},\quad BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{8-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi BE^2 \cdot AE + \pi BE^2 x = \pi BE^2\left(\frac{2}{3}AE + x\right) \\ &= \pi\left[\left(\frac{8-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2\right]\left(\frac{2x+y}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{12}(8-2x+y)(8-y)(2x+y) \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{2\pi}{3}(8-y)(2-x) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\pi}{12}[(8-y)(2x+y) - (8-2x+y)(2x+y) + (8-2x+y)(8-y)] = 0 \end{cases}$$

解得惟一驻点 $P(2,4)$，由于

$$A = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_P = -\frac{2\pi}{3}(8-y)\bigg|_P = -\frac{8\pi}{3},\quad B = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\bigg|_P = \frac{2\pi}{3}(x-2)\bigg|_P = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\bigg|_P = -\frac{\pi}{2}y\bigg|_P = -2\pi$$

又 $\Delta = B^2 - AC = -\frac{16}{3}\pi^2 < 0$，$A < 0$，所以 $x = 2, y = 4$ 时 V 取最大值. 于是 $AB = 3, BC = 2, AD = 4$ 为所求的值.

4.2.6　求条件极值(例 4.38—4.40)

例 4.38(江苏省 1991 年竞赛题)　椭球面 $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z - \sqrt{7} = 0$ 之间的最短距离为______.

解析　设椭球面上的点 $P(x,y,z)$ 到平面的距离为 d，则

$$f(x,y,z) = d^2 = \frac{(x+y+z-\sqrt{7})^2}{3}$$

应用拉格朗日乘数法，令

$$F(x,y,z,\lambda) = \frac{(x+y+z-\sqrt{7})^2}{3} + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 1)$$

由方程组

① 为了使旋转体的体积最大，应 $x < y$.

$$\begin{cases} F_x' = \dfrac{2(x+y+z-\sqrt{7})}{3} + 2\lambda x = 0, \\ F_y' = \dfrac{2(x+y+z-\sqrt{7})}{3} + 4\lambda y = 0, \\ F_z' = \dfrac{2(x+y+z-\sqrt{7})}{3} + 8\lambda z = 0, \\ F_\lambda' = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得驻点$\left(\frac{2}{7}\sqrt{7},\frac{1}{7}\sqrt{7},\frac{1}{14}\sqrt{7}\right)$，$\left(-\frac{2}{7}\sqrt{7},-\frac{1}{7}\sqrt{7},-\frac{1}{14}\sqrt{7}\right)$. 这两点到平面的距离 d 分别是$\frac{1}{6}\sqrt{21}$，$\frac{1}{2}\sqrt{21}$，故最小距离为$\frac{1}{6}\sqrt{21}$.

例 4.39(江苏省1991年竞赛题)　已知 a，b 满足$\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(a\le 0\le b)$，求曲线 $y=x^2+ax$ 与直线 $y=bx$ 所围区域的面积的最大值与最小值.

解析　因为

$$\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x = \int_a^0 (-x)\mathrm{d}x + \int_0^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a^2+b^2) = \frac{1}{2}$$

故 $a^2+b^2=1$. 曲线 $y=x^2+ax$ 与直线 $y=bx$ 所围图形的面积为

$$S = \int_0^{b-a} (bx - x^2 - ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

应用拉格朗日乘数法，令

$$F(a,b,\lambda) = \frac{1}{6}(b-a)^3 + \lambda(a^2+b^2-1)$$

由方程组

$$\begin{cases} F_a' = \dfrac{-1}{2}(b-a)^2 + 2\lambda a = 0, \\ F_b' = \dfrac{1}{2}(b-a)^2 + 2\lambda b = 0, \\ F_\lambda' = a^2 + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得驻点$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，此时 $S=\frac{1}{3}\sqrt{2}$. 又 $a=0$ 时 $b=1$，此时 $S=\frac{1}{6}$；$a=-1$ 时 $b=0$，此时 $S=\frac{1}{6}$. 所以所求面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$，最小值为$\frac{1}{6}$.

例 4.40(江苏省2008年竞赛题)　已知曲面 $4x^2+4y^2-z^2=1$ 与平面 $x-y-z=0$ 的交线在 xy 平面上的投影为一椭圆，求此椭圆的面积.

解析　**方法1**　椭圆的方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$. 椭圆的中心在原点，在椭

圆上任取一点(x,y)，它到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}$.

令 $F=x^2+y^2+\lambda(3x^2+3y^2-2xy-1)$，则

$$\begin{cases} F'_x=2(1+3\lambda)x-2\lambda y=0, & (1)\\ F'_y=2(1+3\lambda)y-2\lambda x=0, & (2)\\ F'_\lambda=3x^2+3y^2-2xy-1=0 \end{cases}$$

由上(1)和(2)两式推得 $y=x$ 或 $y=-x$，故驻点为

$$P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad P_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\quad P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

因此 $d(P_1)=d(P_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$d(P_3)=d(P_4)=\frac{1}{2}$ 分别为椭圆的长、短轴，于是椭圆的面积为 $S=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

方法2　椭圆的方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$. 椭圆的中心在原点，作坐标系的旋转变换，令 $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}v,\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v, \end{cases}$ 代入椭圆方程得 $2u^2+4v^2=1$，因此 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\frac{1}{2}$ 分别为椭圆的长、短轴，于是椭圆的面积为 $S=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

4.2.7　求多元函数在有界闭域上的最值(例4.41—4.42)

例4.41(莫斯科自动化学院1975年竞赛题)　求函数 $z=x^2+y^2-xy$ 在区域 D：$|x|+|y|\leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

解析　首先在 D 的内部：$|x|+|y|<1$，由

$$z'_x=2x-y=0,\quad z'_y=2y-x=0$$

解得驻点 $P_1(0,0)$.

在边界 $x+y=1\ (0<x<1)$ 上，令

$$F=x^2+y^2-xy+\lambda(x+y-1)$$

由 $F'_x=2x-y+\lambda=0$，$F'_y=2y-x+\lambda=0$，$F'_\lambda=x+y-1=0$，解得拉格朗日函数 F 的驻点 $P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

同上，在边界 $y-x=1\ (-1<x<0)$ 上，可求得相应的拉格朗日函数的驻点 $P_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；在边界 $-x-y=1(-1<x<0)$ 上，可求得相应的拉格朗日函数的驻点 $P_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$；在边界 $x-y=1(0<x<1)$ 上，可求得相应的拉格朗日

函数的驻点 $P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. 又记四个边界线段的交点分别为 $P_6(1,0)$, $P_7(0,1)$, $P_8(-1,0)$, $P_9(0,-1)$.

函数 $z(x,y)$ 的最大值与最小值只能在上述 9 个点 $P_i(i=1,2,\cdots,9)$ 中取得. 于是有

$$\begin{aligned}\max z &= \max\{z(P_i)\mid i=1,2,\cdots,9\}=\max\left\{0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,1,1,1\right\}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min z &= \min\{z(P_i)\mid i=1,2,\cdots,9\}=\min\left\{0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,1,1,1\right\}\\&=0\end{aligned}$$

例 4.42(江苏省 2006 年竞赛题) 用拉格朗日乘数法求函数 $f(x,y)=x^2+\sqrt{2}xy+2y^2$ 在区域 $x^2+2y^2\leqslant 4$ 上的最大值与最小值.

解析 在 $x^2+2y^2<4$ 内,由 $f'_x=2x+\sqrt{2}y=0$, $f'_y=\sqrt{2}x+4y=0$ 得惟一驻点 $P_1(0,0)$. 在 $x^2+2y^2=4$ 上,令

$$F=x^2+\sqrt{2}xy+2y^2+\lambda(x^2+2y^2-4)$$

由

$$\begin{cases}F'_x=2x+\sqrt{2}y+2\lambda x=(2+2\lambda)x+\sqrt{2}y=0, & (1)\\ F'_y=\sqrt{2}x+4y+4\lambda y=\sqrt{2}x+(4+4\lambda)y=0, & (2)\\ F'_\lambda=x^2+2y^2-4=0 & (3)\end{cases}$$

将 $4(1+\lambda)$ 乘以(1)式减去 $\sqrt{2}$ 乘以(2)式,得 $(8\lambda^2+16\lambda+6)x=0$. 若 $8\lambda^2+16\lambda+6\neq 0$,则 $x=0$. 由(1)和(2)式得 $y=0$,与(3)式矛盾. 故 $8\lambda^2+16\lambda+6=0$,解得 $\lambda=-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$.

当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时解得驻点 $P_2(\sqrt{2},-1)$, $P_3(-\sqrt{2},1)$;

当 $\lambda=-\frac{3}{2}$ 时解得驻点 $P_4(\sqrt{2},1)$, $P_5(-\sqrt{2},-1)$.

又 $f(P_1)=0$, $f(P_2)=2$, $f(P_3)=2$, $f(P_4)=6$, $f(P_5)=6$,故

$$f_{\min}=0,\quad f_{\max}=6$$

练习题四

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{xy}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1+y}{y}\right)$ [illegible];

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{xy}$；　　　　(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy^2}$；　　　　(6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x-y}$.

2. 已知 $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则　　　　(　　)

A. $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都存在

B. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在

C. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在

D. $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都不存在

3. 函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处连续是函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可偏导的　　(　　)

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

4. 函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可偏导是函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处连续的　　(　　)

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

5. 函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微是函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处连续的　　(　　)

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

6. 函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微是函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可偏导的　　(　　)

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

7. 函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微是函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处具有连续偏导数的
(　　)

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

8. 试讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x-y)}{x+y}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性.

9. 试讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处连续性、可偏导性、可微性.

10. 求下列函数的偏导数或全微分：

(1) 已知 $f(x,y) = x^2 + (\ln y)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}}$，求 $f_x'(2,1)$，$f_y'(2,1)$；

(2) 已知 $z = (1+xy)^y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$；

(3) 已知 $z = x^3 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$，且 f 可导，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$；

(4) 已知 $z = \arctan\frac{x+y}{x-y}$，求 $\mathrm{d}z$；

(5) 已知 $u=\arcsin\dfrac{x}{y}+z^2$,求 $\mathrm{d}u$;

(6) 已知 $z=f(xy,x^2+y^2)$,其中 $y=\varphi(x)$,f,φ 可微,求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(7) 已知 $z=x^2y$,$y=\cos^2x$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(8) 已知 $z=\dfrac{\ln\sqrt{1+x^2}}{\ln(xy)}$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(9) 已知 $z=f(x+\varphi(y))$,且 f,φ 具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(10) 已知 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$,且 f 具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(11) 已知 $z=f(x,y)$,其中 $x=\varphi(y)$,且 f 具有二阶连续偏导数,φ 具有二阶连续导数,求$\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$;

(12) 设 f 连续可导,$z(x,y)=\int_0^y \mathrm{e}^y f(x-t)\mathrm{d}t$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11. 设$z(x,y)=xyf\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$,且 f 可微,证明 $z(x,y)$ 满足形如 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=g(x,y)z$ 的方程,并求函数 $g(x,y)$.

12. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-z=y\mathrm{e}^z$ 确定,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. 设 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$,且 f 可微,求 $\mathrm{d}z$.

14. 设 $u=f(x^2,y^2,z^2)$,其中 $y=\mathrm{e}^x$,且 $\varphi(y,z)=0$,f,φ 皆可微,求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

15. 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

16. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

17. 在平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$上求一点,使它到原点的距离最小.

18. 已知曲面Σ:$\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}=3$.(1) 求该曲面上点 $P(a,b,c)(abc\neq 0)$ 处的切平面方程;(2) 问 a,b,c 为何值时,上述切平面与三个坐标平面所围四面体的体积最大.

19. 设函数 $f(x,y)=2(y-x^2)^2-y^2-\dfrac{1}{7}x^7$.(1) 求 $f(x,y)$ 的极值,并证明函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处不取极值;(2) 当点(x,y)在过原点的任一直线上变化时,求证函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处取极小值.

专题 5　多元函数积分学

5.1　基本概念与内容提要

5.1.1　二重积分基本概念

1）二重积分的定义：设 $f(x,y)$ 在平面的有界闭域 D 上定义，任意地将 D 分割为 n 个小区域 D_i $(i=1,2,\cdots,n)$，若 D_i 的面积为 $\Delta\sigma_i$，D_i 的直径为 d_i，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$，$\forall(x_i,y_i)\in D_i$，则二重积分定义为

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{def}}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

这里右端的极限存在，且与分割 D 的方式无关，与点 (x_i,y_i) 的取法无关.

2）当 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续时，$f(x,y)$ 在 D 上可积.

3）二重积分的主要性质

定理 1（保向性）　若 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 上可积，$\forall(x,y)\in D$，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定理 2（可加性）　设 $f(x,y)$ 在 D 上可积，用光滑曲线将 D 分为两个区域 $D_1\cup D_2$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定理 3（二重积分中值定理）　设 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $\exists(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)S$$

这里 S 为闭域 D 的面积.

定理 4（奇偶对称性）

（1）若有界闭域 D 关于 $x=0$ 对称，$f(x,y)$ 在 D 上可积，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & 若\ f(-x,y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & 若\ f(-x,y) = f(x,y) \end{cases}$$

这里 D_1 是 D 的子域,是 D 中 $x \geqslant 0$ 的部分.

(2) 若有界闭域 D 关于 $y=0$ 对称,$f(x,y)$ 在 D 上可积,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & 若\ f(x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & 若\ f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

这里 D_2 是 D 的子域,是 D 中 $y \geqslant 0$ 的部分.

5.1.2 二重积分的计算

1) 在直角坐标下将二重积分化为两种次序的累次积分

当区域 D 可表示为

$$D = \{(x,y) \mid \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

时,二重积分化为先对 y 后对 x 的累次积分,即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

当区域 D 可表示为

$$D = \{(x,y) \mid \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d\}$$

时,二重积分化为先对 x 后对 y 的累次积分,即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

2) 用平移变换计算二重积分

令 $x = \mu - k, y = \sigma - h$,这里 μ,σ 为新的积分变量,k,h 为常数,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\mu+k, \sigma+h)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\sigma$$

这里 D' 是区域 D 在上述变换下 (μ,σ) 在 $\mu\sigma$ 平面上的对应区域.

3) 用极坐标变换计算二重积分

令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$,这里 θ,ρ 为新的积分变量,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

这里 D' 是区域 D 在上述变换下 (θ,ρ) 在 $\theta\rho$ 平面上的对应区域,其中 $\rho \geqslant 0, 0 \leqslant \theta$

2π.

5.1.3　交换二次积分的次序

对于给定的先对 y 后对 x 的二次积分,可由四个积分上下限决定积分区域 D,再将区域 D 上的二重积分化为先对 x 后对 y 的二次积分;对应的,对于给定的先对 x 后对 y 的二次积分,也可化为先对 y 后对 x 的二次积分.极坐标下的二次积分也可作类似的积分次序的交换.

5.1.4　三重积分基本概念与计算

1) 三重积分的定义:设 $f(x,y,z)$ 在空间的有界闭域 Ω 上定义,任意地将 Ω 分割为 n 个小区域 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,n)$,Ω_i 的体积为 Δv_i,Ω_i 的直径为 d_i,$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$,$\forall(x_i,y_i,z_i)\in\Omega_i$,则三重积分定义为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \xlongequal{\text{def}} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i$$

这里右端的极限存在,且与分割 Ω 的方式无关,与点 (x_i,y_i,z_i) 的取法无关.

2) 当 $f(x,y,z)$ 在闭域 Ω 上连续时,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积.

3) 三重积分的主要性质:三重积分与二重积分一样,保向性、可加性、积分中值定理皆成立,在这里不一一赘述.

定理(奇偶对称性)

(1) 若有界闭域 Ω 关于 $x=0$ 对称,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \text{若 } f(-x,y,z)=-f(x,y,z),\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & \text{若 } f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里 Ω_1 是 Ω 的子域,是 Ω 中 $x\geqslant 0$ 的部分.

(2) 若有界闭域 Ω 关于 $y=0$ 对称,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \text{若 } f(x,-y,z)=-f(x,y,z),\\ 2\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & \text{若 } f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里 Ω_2 是 Ω 的子域,是 Ω 中 $y\geqslant 0$ 的部分.

(3) 若有界闭域 Ω 关于 $z=0$ 对称,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \text{若 } f(x,y,-z)=-f(x,y,z),\\ 2\iiint\limits_{\Omega_3} f(x,y,z)\mathrm{d}V, & \text{若 } f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里 Ω_3 是 Ω 的子域,是 Ω 中 $z\geqslant 0$ 的部分.

4）三重积分的计算

（1）在直角坐标下，将三重积分化为先计算一个定积分再计算一个二重积分

若闭域 Ω 在 xy 平面上的投影为有界闭域 D，$\forall(x,y)\in D$，若区域 Ω 中的点 (x,y,z) 满足 $\varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)$，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

类似的，有先对 y 计算一个定积分再计算一个二重积分的公式，或先对 x 计算一个定积分再计算一个二重积分的公式.

（2）在直角坐标下，将三重积分化为先计算一个二重积分再计算一个定积分

若闭域 Ω 在 z 轴上的投影为闭区间 $[c,d]$，$\forall z\in[c,d]$，过点 $(0,0,z)$ 作平面 Π 垂直于 z 轴，若平面 Π 与闭域 Ω 的截面为有界闭域 $D(z)$，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{c}^{d}\mathrm{d}z\iint_{D(z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

类似的，有先对 y，z 计算一个二重积分后对 x 计算一个定积分的公式，或先对 z，x 计算一个二重积分后对 y 计算一个定积分的公式.

（3）利用柱面坐标计算三重积分

令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z$，这里 θ,ρ,z 为新的积分变量，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

这里 Ω' 是区域 Ω 在上述变换下 (θ,ρ,z) 在 $\theta\rho z$ 空间对应的闭域，其中 $\rho\geqslant0,0\leqslant\theta\leqslant2\pi,-\infty<z<+\infty$.

（4）利用球面坐标计算三重积分

令 $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$，这里 r,φ,θ 是新的积分变量，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

这里 Ω' 是区域 Ω 在上述变换下 (r,φ,θ) 在 $r\varphi\theta$ 空间对应的闭域，其中 $r\geqslant0,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

5.1.5 重积分的应用

1）平面图形的面积

设 D 为 xy 平面上的有界闭域，则 D 的面积为

$$S=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

2）空间曲面的面积

设Σ为一空间曲面，Σ在xy平面上的投影为有界闭域D，Σ的点与D的点一一对应，设Σ的方程为$z=f(x,y)$，则曲面Σ的面积为

$$S=\iint_D \sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

与此公式对应的，还有化为yz平面上的有界闭域上的二重积分的计算公式，以及化为zx平面上的有界闭域上的二重积分的计算公式.

3）立体的体积

设Ω为空间的立体区域，Ω为有界闭域，则Ω的体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

这里三项分别是直角坐标下、柱面坐标下、球面坐标下的三重积分.

4）物理上的应用

二重积分可用于求平面薄片的质量，三重积分可用于求空间立体的质量、立体的质心(重心)等.

5.1.6 曲线积分基本概念与计算

1）空间曲线的弧长

设曲线Γ的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)$$

其中$t\in[\alpha,\beta]$，曲线Γ上的点与$[\alpha,\beta]$上的点一一对应，函数φ,ψ,ω连续可导，则曲线Γ的弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\omega'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

2）第一型曲线积分的定义与性质

设$\overset{\frown}{AB}$是可求长的连续曲线，函数$f(x,y,z)$在$\overset{\frown}{AB}$上定义，将$\overset{\frown}{AB}$任意分割为n个小弧段$\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$，Γ_i的弧长记为Δl_i，Γ_i的直径为d_i，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$，在$\Gamma_i$上任取点$(x_i,y_i,z_i)$，则函数$f$沿曲线$\overset{\frown}{AB}$的第一型曲线积分定义为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}l \xlongequal{\text{def}} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i$$

这里右端的极限存在，且与分割$\overset{\frown}{AB}$的方式无关，与点(x_i,y_i,z_i)的取法无关.

当f在$\overset{\frown}{AB}$上连续时，f在$\overset{\frown}{AB}$上的第一型曲线积分存在，即可积.

定理(奇偶函数在对称曲线上的积分)

(1) 若曲线$\overset{\frown}{AB}$上的点关于$x=0$对称，f在$\overset{\frown}{AB}$上可积，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}l = \begin{cases} 0, & 若\ f(-x,y,z) = -f(x,y,z), \\ 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}l, & 若\ f(-x,y,z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

这里 Γ_1 是曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的 $x \geqslant 0$ 的部分曲线.

(2) 若曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点关于 $y=0$ 对称, f 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上可积,则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}l = \begin{cases} 0, & 若\ f(x,-y,z) = -f(x,y,z), \\ 2\int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}l, & 若\ f(x,-y,z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

这里 Γ_2 是曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的 $y \geqslant 0$ 的部分曲线.

(3) 若曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点关于 $z=0$ 对称, f 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上可积,则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}l = \begin{cases} 0, & 若\ f(x,y,-z) = -f(x,y,z), \\ 2\int_{\Gamma_3} f(x,y,z)\mathrm{d}l, & 若\ f(x,y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

3) 第一型曲线积分的计算

设 $\overset{\frown}{AB}$ 为空间的连续曲线,其参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t)$$

其中 $t \in [\alpha,\beta]$, $\overset{\frown}{AB}$ 上的点与 $[\alpha,\beta]$ 上的点一一对应,函数 φ,ψ,ω 连续可导,函数 $f(x,y,z)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上连续,则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}l = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\omega'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

4) 第二型曲线积分的定义

设 $\overset{\frown}{AB}$ 为空间的光滑曲线, $\overset{\frown}{AB}$ 的顺向的单位切向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上定义,将 $\overset{\frown}{AB}$ 任意地分割为 n 个小弧段 $\Gamma_i (i=1,2,\cdots,n)$, Γ_i 的弧长记为 Δl_i, Γ_i 的直径为 d_i,令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$,在 Γ_i 上任取点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$,记

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\Big|_{M_i} = (\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$$

$$\Delta x_i = \Delta l_i \cdot \cos\alpha_i, \quad \Delta y_i = \Delta l_i \cdot \cos\beta_i, \quad \Delta z_i = \Delta l_i \cdot \cos\gamma_i$$

则函数 P,Q,R 沿 $\overset{\frown}{AB}$ 从 A 到 B 的第二型曲线积分定义为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z \xlongequal{\text{def}}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i$$

式中三个极限皆存在，且与分割$\widehat{AB}$的方式无关，与点(x_i,y_i,z_i)的取法无关.

当函数 P,Q,R 皆在$\widehat{AB}$上连续时，对应的第二型曲线积分存在，即可积.

5）第二型曲线积分的计算

设曲线$\widehat{AB}$的方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)$$

其中$t\in[\alpha,\beta]$，$\widehat{AB}$的点与$[\alpha,\beta]$的点一一对应，函数φ,ψ,ω在$[\alpha,\beta]$上连续可导，函数 P,Q,R 在$\widehat{AB}$上连续，则

$$\int_{\widehat{AB}}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\psi'(t)\\ \qquad+R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\omega'(t)]\mathrm{d}t,\\ \displaystyle\int_\beta^\alpha[P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\psi'(t)\\ \qquad+R(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\omega'(t)]\mathrm{d}t\end{cases}$$

其中，第一式为t增大时，对应的点在曲线$\widehat{AB}$上从A到B；第二式为t增大时，对应的点在曲线$\widehat{AB}$上从B到A.

第二型曲线积分在物理上表示一质点在力$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$作用下，沿曲线$\widehat{AB}$从A到B所作的功.

5.1.7 格林公式

1）设D为xy平面上的有界闭域，D的边界曲线Γ逐段光滑，取正向Γ^+，函数P,Q在D上连续可微，则有格林公式

$$\int_{\Gamma^+}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2）平面的曲线积分与路线无关的充要条件

定理 设G是xy平面上的单连通域，函数P,Q在G上连续可微，则下列四个陈述相互等价：

（1）$\forall(x,y)\in G,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$；

（2）$\forall A,B\in G$，曲线积分$\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路线无关；

（3）$\forall\Gamma\subset G$，Γ为封闭曲线，$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$；

（4）$\exists$ 可微函数$u(x,y)$，使得$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，且

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

或

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y+C$$

这里$(x_0,y_0),(x,y)\in G$.

5.1.8　曲面积分基本概念与计算

1) 第一型曲面积分的定义与性质

设Σ为空间的有界曲面,函数$f(x,y,z)$在Σ上定义,将Σ任意地分割为n个小曲面$\Sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$,Σ_i的面积为ΔS_i,Σ_i的直径为d_i,$\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{d_i\}$,在$\Sigma_i$上任取点$(x_i,y_i,z_i)$,则函数$f$沿$\Sigma$的第一型曲面积分定义为

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S\xlongequal{\text{def}}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

这里右端的极限存在,且与分割Σ的方式无关,与点(x_i,y_i,z_i)的取法无关.

当$f(x,y,z)$在Σ上连续时,f在Σ上的第一型曲面积分存在,即可积.

定理(奇偶函数在对称曲面上的积分)

(1) 若曲面Σ的点关于$x=0$对称,f在Σ上可积,则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & 若\ f(-x,y,z)=-f(x,y,z),\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S, & 若\ f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里Σ_1是Σ的$x\geqslant 0$的部分曲面.

(2) 若曲面Σ的点关于$y=0$对称,f在Σ上可积,则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & 若\ f(x,-y,z)=-f(x,y,z),\\ 2\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S, & 若\ f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里Σ_2是Σ的$y\geqslant 0$的部分曲面.

(3) 若曲面Σ的点关于$z=0$对称,f在Σ上可积,则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & 若\ f(x,y,-z)=-f(x,y,z),\\ 2\iint\limits_{\Sigma_3}f(x,y,z)\mathrm{d}S, & 若\ f(x,y,-z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

这里Σ_3是Σ的$z\geqslant 0$的部分曲面.

2) 第一型曲面积分的计算

若曲面Σ的方程为$z=z(x,y),(x,y)\in D$,D为xy平面上的有界闭域,函数

$z(x,y)$ 在 D 上连续可微，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若曲面 Σ 的方程为 $x = x(y,z)$，$(y,z)\in D_1$，D_1 为 yz 平面上的有界闭域，函数 $x(y,z)$ 在 D_1 上连续可微，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_1} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x_y')^2+(x_z')^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

若曲面 Σ 的方程为 $y = y(z,x)$，$(z,x)\in D_2$，D_2 为 zx 平面上的有界闭域，函数 $y(z,x)$ 在 D_2 上连续可微，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_2} f(x,y(z,x),z)\sqrt{1+(y_z')^2+(y_x')^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

3) 第二型曲面积分的定义

设 Σ 为光滑的双侧曲面，Σ 某侧的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，将函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Σ 上定义，并将 Σ 任意地分割为 n 个小曲面 Σ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，Σ_i 的面积为 ΔS_i，Σ_i 的直径为 d_i，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$，在 Σ_i 上任取点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，记

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\Big|_{M_i} = (\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$$

$$\Delta y_i\Delta z_i = \Delta S_i\cos\alpha_i,\quad \Delta z_i\Delta x_i = \Delta S_i\cos\beta_i,\quad \Delta x_i\Delta y_i = \Delta S_i\cos\gamma_i$$

则函数 P，Q，R 沿 Σ 的某侧的第二型曲面积分定义为

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma\text{某侧}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i\Delta z_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i\Delta x_i\\ &+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i\Delta y_i\end{aligned}$$

式中三个极限皆存在，且与分割 Σ 的方式无关，与点 (x_i,y_i,z_i) 的取法无关。

当函数 P，Q，R 皆在 Σ 上连续时，对应的第二型曲面积分存在，即可积。

4) 第二型曲面积分的计算

(1) 若曲面 Σ 的方程为 $z = z(x,y)$，$(x,y)\in D$，D 为 xy 平面上的有界闭域，$z(x,y)$ 在 D 上连续可微，则

$$\iint_{\Sigma\text{某侧}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint_{D_1}\left[P(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R(x,y,z(x,y))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 $\pm$ 号选取的方法是上侧取正，下侧取负（设 z 轴正向向上）.

(2) 若曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$，$(y,z)\in D_2$，D_2 为 yz 平面上的有界闭域，$x(y,z)$ 在 D_2 上连续可微，则

$$\iint_{\Sigma\text{某侧}}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint_{D_2}\left[P(x(y,z),y,z)+Q(x(y,z),y,z)\left(-\frac{\partial x}{\partial y}\right)+R(x(y,z),y,z)\left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这里 $\pm$ 号选取的方法是前侧取正，后侧取负（设 x 轴正向向前）.

(3) 若曲面 Σ 的方程为 $y=y(z,x)$，$(z,x)\in D_3$，D_3 为 zx 平面上的有界闭域，$y(z,x)$ 在 D_3 上连续可微，则

$$\iint_{\Sigma\text{某侧}}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iint_{D_3}\left[P(x,y(z,x),z)\left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)+Q(x,y(z,x),z)+R(x,y(z,x),z)\left(-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

这里 $\pm$ 号选取的方法是右侧取正，左侧取负（设 y 轴正向向右）.

5.1.9 斯托克斯公式

1) 设 Σ 是逐段光滑的单闭曲线 Γ 所包围的非封闭光滑双侧曲面，取某定侧 Σ^+，按右旋法则确定 Γ 的正向 Γ^+，Ω 是空间的立体区域，使得 $\Sigma\subset\Omega$，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上连续可微，则有斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma^+}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2) 空间曲线积分与路线无关的充要条件

定理 设 G 是空间的面单连通区域，函数 P,Q,R 在 G 上连续可微，则下列四条陈述相互等价：

(1) $\forall(x,y,z)\in\Omega$，$\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$，$\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$；

(2) $\forall A,B\in\Omega$，$\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路线无关；

(3) $\forall\Gamma\subset\Omega$，$\Gamma$ 为封闭曲线，$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$；

(4) $\exists u(x,y,z)$ 可微，使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，且

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\mathrm{d}z+C$$

或

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\mathrm{d}z+C$$

这里 $(x_0,y_0,z_0),(x,y,z)\in G$.

5.1.10　高斯公式

1) 设 Ω 是空间的有界闭域，其边界是逐片光滑的封闭曲面 Σ，取外侧，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上连续可微，则有高斯公式

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

2) 曲面积分与曲面无关的充要条件

定理　设 Ω 为空间的体单连通域，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上连续可微，曲面 $\Sigma\subset\Omega$，则下列三条陈述相互等价：

(1) $\forall(x,y,z)\in\Omega,\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$;

(2) $\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与曲面无关，这里 Σ_1 是与 Σ 具有相同边界曲线 Γ 的任意曲面，且其侧服从右旋法则，$\Sigma_1\subset\Omega$.

(3) $\forall\Sigma_2\subset\Omega,\Sigma_2$ 为封闭曲面，取外侧（或内例），有

$$\iint_{\Sigma_2}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

5.2　竞赛题与精选题解析

5.2.1　二重积分的计算(例 5.1—5.14)

例 5.1（浙江省 2011 年竞赛题）　计算 $\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1}\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析　化为先对 y 后对 x 的二次积分计算，有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\quad(\text{令 } t=\sqrt{y})\\&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-\sqrt{x}}\sqrt[3]{\sqrt{x}+t}\cdot t\mathrm{d}t\quad(\text{令 } u=\sqrt{x}+t)\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt[3]{u}(u-\sqrt{x})\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \left(\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}\sqrt{x}u^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_{\sqrt{x}}^1 \mathrm{d}x$$

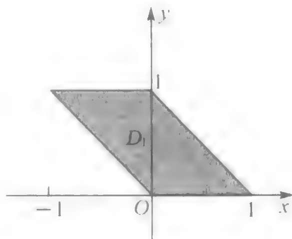
$$= 2\int_0^1 \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{4}\sqrt{x} + \frac{9}{28}x^{\frac{7}{6}}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{13}$$

例 5.2(江苏省 2004 年竞赛题)　设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且 D 为 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$，则 $\iint\limits_D f(y)f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿.

解析　由于

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f(x+y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leqslant x+y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故在区域 $D_1 = \{(x,y) \mid -y \leqslant x \leqslant 1-y, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$（如下图所示）上 $f(y) = y$，$f(x+y) = x+y$；在 D_1 的外部 $f(y) = 0, f(x+y) = 0$. 于是



$$\iint\limits_D f(y) \cdot f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_1} y(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-y}^{1-y} y(x+y)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 y\,\frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_{-y}^{1-y}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}y\mathrm{d}y = \frac{1}{4}y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

例 5.3(南京工业大学 2009 年竞赛题)　求 $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\int_0^t \mathrm{d}x \int_0^{t-x} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

解析　记 D 为 $x+y=t(t>0)$ 与 x 轴、y 轴所围的区域，则

$$\int_0^t \mathrm{d}x \int_0^{t-x} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ 在区域 D 上连续，应用二重积分中值定理，有

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2} \cdot \frac{1}{2}t^2$$

这里 $(\xi,\eta) \in D$，于是

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\int_0^t \mathrm{d}x \int_0^{t-x} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}\,\frac{1}{2}t^2$$

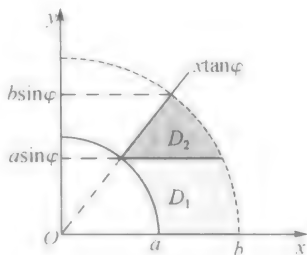
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{2}$$

例 5.4(天津市 2003 年竞赛题) 计算

$$I=\int_0^{a\sin\varphi}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{a\sin\varphi}^{b\sin\varphi}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{y\cot\varphi}^{\sqrt{b^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

其中 $0<a<b,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$,且 a,b,φ 均为常数.

解析 原式中两项分别表示函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 在图中 D_1 与 D_2 区域上的两次积分,$D=D_1+D_2$,化为极坐标计算,有



$$\text{原式}=\iint_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\varphi}\mathrm{d}\theta\int_a^b\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{\mathrm{e}^{-a^2}-\mathrm{e}^{-b^2}}{2}\varphi$$

注:原题中将积分下限 $y\cot\varphi$ 错写为 $y\tan\varphi$.

例 5.5(江苏省 2012 年竞赛题) 计算二重积分 $\iint\limits_D(x^2+xy)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

解析 曲线 $x^2+y^2=2x$ 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$,区域 D 关于 $y=0$ 对称,$2x^3y$ 关于 $y=0$ 为奇函数,$x^2(x^2+y^2)$ 关于 $y=0$ 为偶函数,应用奇偶对称性,得

$$\text{原式}=\iint_D x^2(x^2+2xy+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D(y\geqslant 0)}x^2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^5\cos^2\theta\mathrm{d}\rho=\frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\theta\mathrm{d}\theta$$

其中 $D(y\geqslant 0)$:$0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 由于

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\mathrm{d}\sin x=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2x)\cos^{n-2}x\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

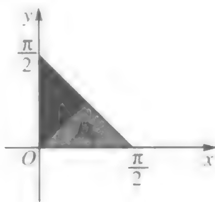
因此 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. 又因为 $I_0=\dfrac{\pi}{2}$,所以

$$I_8=\frac{7\times5\times3\times1}{8\times6\times4\times2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35}{4\times64}\pi$$

故原式 $=\dfrac{64}{3}\cdot\dfrac{35}{4\times64}\pi=\dfrac{35}{12}\pi$.

例 5.6(江苏省 2002 年竞赛题) 求 $\iint\limits_D|\sin(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D:$x\geqslant 0$,

$y \geqslant 0,\ x+y \leqslant \frac{\pi}{2}$.



解析 如图,用直线 $y=x$ 将区域 D 分割为 D_1 与 D_2,则在 D_1 上 $0 \leqslant x-y \leqslant \frac{\pi}{2}$,在 D_2 上 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x-y \leqslant 0$,于是

$$\text{原式}=\iint_{D_1}\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

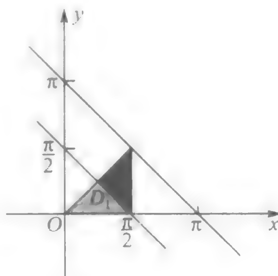
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\sin(x-y)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x\int_x^{\frac{\pi}{2}-x}\sin(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x-y)\Big|_y^{\frac{\pi}{2}-y}\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x-y)\Big|_x^{\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2y)\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$=2\left(y+\frac{1}{2}\cos 2y\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1$$

例 5.7(江苏省 2006 年竞赛题) 设 D 为 $y=x,x=\frac{\pi}{2},y=0$ 所围的平面图形,求 $\iint\limits_D|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



解析 用 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 将 D 分为 D_1+D_2(如图所示),则

$$\text{原式}=\iint_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

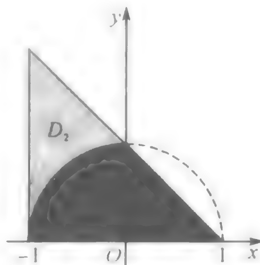
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x}\cos(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[1-\sin(2y)]\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2x)-1]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-1$$

例 5.8(江苏省 2016 年竞赛题) 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,-1\leqslant x\leqslant 1\}$,试求二重积分

$$\iint_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



解析 在 D 内作圆 $x^2+y^2=1$ 使其分为 D_1 与 D_2(如右图所示),于是

$$\text{原式}=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又

$$\begin{aligned}\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-x+2x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}x+\frac{\pi}{8}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{6}+\frac{\pi}{8}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

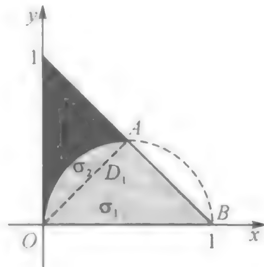
$$\begin{aligned}\iint_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y-2\\&=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{3}-x+2x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}x-2\\&=2\int_0^1\left(\frac{1}{3}+2x^2\right)\mathrm{d}x-2=2-2=0\end{aligned}$$

于是

$$\text{原式}=-2\left(-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}\right)+0=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$$

例 5.9(江苏省 2016 年竞赛题) 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$,试求二重积分 $\iint\limits_D|x^2+y^2-x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析 在 D 内作圆 $x^2+y^2=x$ 使其分为 D_1 与 D_2(如右图所示),圆 $x^2+y^2=x$ 与直线 $y=1-x$ 的交点分别为 $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$B(1,0)$,于是



$$\text{原式}=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再用线段 OA 将 D_1 分为 σ_1 与 σ_2(如图),则

$$\iint_{\sigma}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{1/2}\mathrm{d}y\int_y^{1-y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{1/2}\left(-\frac{1}{6}+2y^2-\frac{8}{3}y^3\right)\mathrm{d}y=-\frac{1}{24}$$

$$\iint_{\sigma_2}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}(\rho^2-\rho\cos\theta)\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{1}{12}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{12}\left(\frac{3}{8}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{32}\sin 4\theta\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=-\frac{\pi}{128}+\frac{1}{48}$$

$$\iint_{D}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-2x+3x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}x=0$$

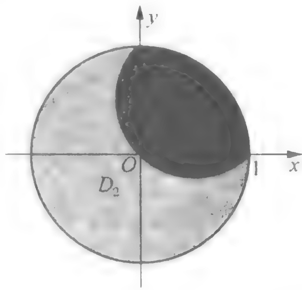
于是

$$\text{原式}=-2\left(\iint_{\sigma_1}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\sigma_2}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)+\iint_{D}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{1}{24}-\frac{\pi}{128}+\frac{1}{48}\right)+0=\frac{1}{24}+\frac{\pi}{64}$$

例 5.10(全国大学生 2013 年决赛题)　求二重积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}|x^2+y^2-x-y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



解析　在圆 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 内作圆 $x^2+y^2-x-y=0$,即

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

使其分为 D_1 与 D_2(如图),由于圆 D_1 在原点处的切线是第 Ⅱ,Ⅳ 象限的角平方线,于是

$$I=-\iint_{D_1}(x^2+y^2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x^2+y^2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D}(x^2+y^2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}(\rho^2-\rho(\cos\theta+\sin\theta))\rho\mathrm{d}\rho-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2-\rho(\cos\theta+\sin\theta))\rho\mathrm{d}\rho$$

$$-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}(\rho^2-\rho(\cos\theta+\sin\theta))\rho\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho-0$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{2}$$

$$\xlongequal{\text{令 }\theta+\frac{\pi}{4}=t}\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4t\mathrm{d}t+\frac{2}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin^4t\mathrm{d}t+\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}-1=\frac{3}{8}\pi$$

例 5.11（全国大学生 2009 年初赛题）　计算$\iint\limits_D\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 为直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围的三角形区域.

解析　运用极坐标计算，记 $\varphi(\theta)=\cos\theta+\sin\theta$，则

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\varphi(\theta)}}\frac{\varphi(\theta)\ln(1+\tan\theta)}{\sqrt{1-\rho\varphi(\theta)}}\rho^2\mathrm{d}\rho\quad(\text{令}\sqrt{1-\rho\varphi(\theta)}=t)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\ln(1+\tan\theta)}{\varphi^3(\theta)}(1-t^2)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{16}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\tan\theta)}{(1+\tan\theta)^2}\mathrm{d}(1+\tan\theta)\quad(\text{令 }1+\tan\theta=u)$$

$$=\frac{16}{15}\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2}\mathrm{d}u=-\frac{16}{15}\int_1^{+\infty}\ln u\mathrm{d}\frac{1}{u}$$

$$=-\frac{16}{15}\left(\frac{\ln u}{u}\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\right)=-\frac{16}{15}\frac{1}{u}\Big|_1^{+\infty}=\frac{16}{15}$$

例 5.12（莫斯科技术物理学院 1977 年竞赛题）　设 Γ 为圆 $x^2+y^2=4$，现引入函数 $\rho(x,y)$，其绝对值等于点 (x,y) 到曲线 Γ 的距离，其符号按下列方法确定：当点 (x,y) 在圆 Γ 的内部时取负号，当点 (x,y) 在圆 Γ 的外部时取正号. 已知常数 a：$0<a<2$，求二重积分 $\iint\limits_{|\rho(x,y)|\leqslant a}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析　设 (ρ,θ) 为点 (x,y) 的极坐标，且

$$D=\{(x,y)\mid 2-a\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2+a\}$$

则当 $(x,y)\in D$ 时，$\rho(x,y)=\rho-2$，于是

$$\iint\limits_{|\rho(x,y)|\leqslant a}\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{2-a}^{2+a}(\rho-2)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\left(\frac{1}{3}\rho^3-\rho^2\right)\Big|_{2-a}^{2+a}$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3$$

例 5.13(江苏省 2002 年竞赛题)　设 $f(u)$ 在 $u=0$ 可导，$f(0)=0$，D：$x^2+y^2\leqslant 2tx$，$y\geqslant 0$，求 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{t^4}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析　首先采用极坐标计算二重积分，有

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2t}\mathrm{d}\rho\int_0^{\arccos\frac{\rho}{2t}}f(\rho)\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2t}\rho^2f(\rho)(-\cos\theta)\Big|_0^{\arccos\frac{\rho}{2t}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2t}\rho^2f(\rho)\left(1-\frac{\rho}{2t}\right)\mathrm{d}\rho$$

于是

$$原式=\lim_{t\to 0+}\frac{t\int_0^{2t}\rho^2f(\rho)\mathrm{d}\rho-\frac{1}{2}\int_0^{2t}\rho^3f(\rho)\mathrm{d}\rho}{t^5}=\lim_{t\to 0+}\frac{\int_0^{2t}\rho^2f(\rho)\mathrm{d}\rho}{5t^4}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2(2t)^2f(2t)}{20t^3}=\frac{4}{5}\lim_{t\to 0+}\frac{f(2t)-f(0)}{2t}=\frac{4}{5}f'(0)$$

例 5.14(浙江省 2010 年竞赛题)　计算 $\iint\limits_{R^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $0<\rho<1$.

解析　运用二重积分换元积分法，令 $x=t+s$，$y=t-s$，则雅可比行列式 $J=-2$，面积微元为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|J|\mathrm{d}t\mathrm{d}s=2\mathrm{d}t\mathrm{d}s$，于是

$$原式=2\iint\limits_{R^2}\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)t^2+(1+\rho)s^2}{1-\rho^2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

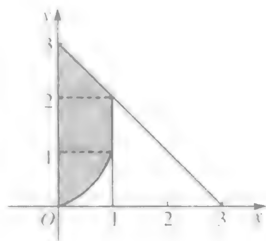
再运用换元积分法，令 $t=\sqrt{1+\rho}u$，$s=\sqrt{1-\rho}v$，则面积微元为 $\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，并采用极坐标计算，有

$$原式=2\sqrt{1-\rho^2}\iint\limits_{R^2}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\sqrt{1-\rho^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\sqrt{1-\rho^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=2\pi\sqrt{1-\rho^2}$$

5.2.2　交换二次积分的次序(例 5.15—5.23)

例 5.15(江苏省 2000 年竞赛题)　交换二次积分的次序：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y=$ ________.



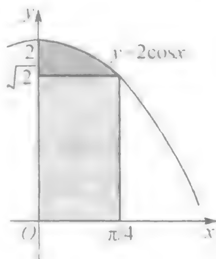
解析　由 $x=0$，$x=1$，$y=x^2$，$y=3-x$ 所围的积分区域如图所示，则交换积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$+\int_1^2 dy\int_0^1 f(x,\ y)dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y} f(x,\ y)dx$$

例 5.16(江苏省 2012 年竞赛题)　交换二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\int_0^{2\cos x} f(x,y)dy$ 的顺序.

解析　由 $x=0,x=\frac{\pi}{4},y=0,y=2\cos x$ 所围的积分区域如右图所示,交换积分顺序得



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\int_0^{2\cos x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} dy\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{2}}^2 dy\int_0^{\arccos\frac{y}{2}} f(x,y)dx$$

例 5.17(精选题)　设 $f(x)$ 连续可导,$a>0$,求$\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy$.

解析　交换二次积分的次序,有

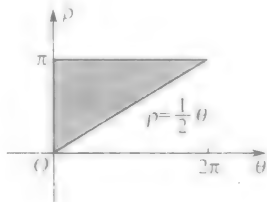
$$原式=\int_0^a dy\int_y^a \frac{f'(y)}{\sqrt{\left(\frac{a-y}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+y}{2}\right)^2}}dx$$

$$=\int_0^a dy\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(y)dt\quad\left(令\ x-\frac{a+y}{2}=\frac{a-y}{2}\sin t\right)$$

$$=\pi\int_0^a f'(y)dy=\pi[f(a)-f(0)]$$

例 5.18(江苏省 2004 年竞赛题)　求二次积分

$$\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi}(\theta^2-1)e^{\rho^2}d\rho$$



解析　如右图,在(θ,ρ)平面上交换积分次序,有

$$原式=\int_0^{\pi} d\rho\int_0^{2\rho}(\theta^2-1)e^{\rho^2}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi} e^{\rho^2}\left(\frac{1}{3}\theta^3-\theta\right)\Big|_0^{2\rho}d\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\rho^3e^{\rho^2}d\rho-2\int_0^{\pi}\rho e^{\rho^2}d\rho\quad(令\ \rho^2=t)$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi} te^t dt-\int_0^{\pi} e^t dt=\left[\frac{4}{3}e^t(t-1)-e^t\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{3}e^{\pi^2}(4\pi^2-7)+\frac{7}{3}$$

例 5.19(江苏省 2008 年竞赛题)　求$\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^6}\int_0^t dx\int_x^t \sin(xy)^2dy$.

解析 交换积分次序,有

$$\int_0^t dx\int_x^t \sin(xy)^2 dy = \int_0^t dy\int_0^y \sin(xy)^2 dx$$

两次应用洛必达法则和积分变换,则

$$原式 = \lim_{t\to 0+}\frac{\int_0^t \sin(tx)^2 dx}{6t^5} = \lim_{t\to 0+}\frac{\int_0^{t^2}\sin u^2 du}{6t^6} = \lim_{t\to 0+}\frac{2t\sin t^4}{36t^5} = \frac{1}{18}$$

例 5.20(北京市 1994 年竞赛题) 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的二元函数,$f(0,0)=0$,且在点$(0,0)$处 $f(x,y)$ 可微,求极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2} dt\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$$

解析 交换积分次序,有

$$\int_0^{x^2} dt\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du = -\int_0^x\left(\int_0^{u^2} f(t,u)dt\right)du$$

应用洛必达法则与积分中值定理,则

$$原式 = \lim_{x\to 0+}\frac{-\int_0^x\left(\int_0^{u^2} f(t,u)dt\right)du}{\frac{x^4}{4}} = \lim_{x\to 0+}\frac{-\int_0^{x^2} f(t,x)dt}{x^3}$$

$$= -\lim_{x\to 0+}\frac{f(\xi(x),x)\cdot x^2}{x^3} = -\lim_{x\to 0+}\frac{f(\xi(x),x)}{x}\quad (0<\xi(x)<x^2)$$

由于 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微,$f(0,0)=0$,及 $\xi(x)=o(x)$,所以

$$\begin{aligned} f(\xi(x),x) &= f(0,0)+f'_x(0,0)\xi(x)+f'_y(0,0)x+o(\sqrt{\xi^2(x)+x^2}) \\ &= f'_y(0,0)x+o(x) \end{aligned}$$

因此

$$原式 = -\lim_{x\to 0+}\frac{f'_y(0,0)x+o(x)}{x} = -f'_y(0,0)$$

例 5.21(北京市 1996 年竞赛题) 设 $f(x)$ 为连续偶函数,试证明:

$$\iint_D f(x-y)dxdy = 2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du$$

其中 D 为正方形 $|x|\leqslant a, |y|\leqslant a(a>0)$.

解析 **方法 1** 根据题意,有

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a} f(x-y)\mathrm{d}y \xlongequal{令 u=x-y} \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x+a}^{x-a}[-f(u)]\mathrm{d}u$$

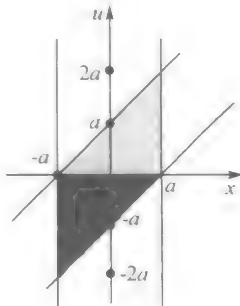
$$= \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x-a}^{x+a} f(u)\mathrm{d}u$$

参看下图，变换积分顺序，上式化为

$$\int_{-2a}^{0}\mathrm{d}u\int_{-a}^{u+a} f(u)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2a}\mathrm{d}u\int_{u-a}^{a} f(u)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2a}^{0} f(u)(u+2a)\mathrm{d}u + \int_{0}^{2a} f(u)(2a-u)\mathrm{d}u$$

因为 $f(x)$ 为偶函数，有



$$\int_{-2a}^{0} f(u)(u+2a)\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{令 u=-v} -\int_{0}^{2a} f(-v)(2a-v)\mathrm{d}(-v)$$

$$= \int_{0}^{2a} f(v)(2a-v)\mathrm{d}v = \int_{0}^{2a} f(u)(2a-u)\mathrm{d}u$$

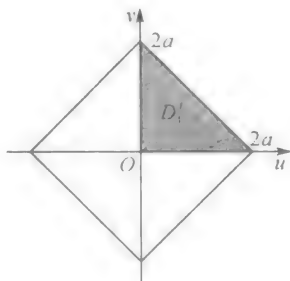
故

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{0}^{2a}(2a-u)f(u)\mathrm{d}u$$

方法 2　运用二重积分换元积分法，令 $u=x-y, v=x+y$，则 $x=\frac{1}{2}(u+v)$，$y=\frac{1}{2}(v-u)$，雅可比行列式 $J=\frac{1}{2}$，面积微元为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，故

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{D'} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中 D'：$|u+v|\leqslant 2a$，$|u-v|\leqslant 2a$（见右图）。由于区域 D' 关于 $u=0$ 对称且 $f(u)$ 关于 u 为偶函数，区域 D' 关于 $v=0$ 对称且 $f(u)$ 关于 v 为偶函数，应用二重积分的奇偶对称性得



$$\iint_{D'} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\iint_{D_1'} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

于是

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1'} f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= 2\int_{0}^{2a}\mathrm{d}u\int_{0}^{2a-u} f(u)\mathrm{d}v = 2\int_{0}^{2a}(2a-u)f(u)\mathrm{d}u$$

例 5.22(精选题)　设 $x \geq 0$，$f_0(x) > 0$，若 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$（$n = 1,2,3,\cdots$），求证：

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f_0(t)\mathrm{d}t \qquad (*)_n$$

解析　用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(1-1)!}\int_0^x (x-t)^{1-1} f_0(t)\mathrm{d}t$$

所以 $(*)_1$ 成立. 假设 $(*)_k$ 成立，即

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-t)^{k-1} f_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-u)^{k-1} f_0(u)\mathrm{d}u$$

则

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x) &= \int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t-u)^{k-1} f_0(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t (t-u)^{k-1} f_0(u)\mathrm{d}u \quad \text{（交换积分次序）} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x \mathrm{d}u\int_u^x (t-u)^{k-1} f_0(u)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x \left[\frac{1}{k}(t-u)^k \Big|_u^x f_0(u)\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{k!}\int_0^x (x-u)^k f_0(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f_0(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

所以 $(*)_{k+1}$ 成立，因此 $(*)_n$ 对任意正整数 n 成立.

例 5.23(精选题)　设 $D: x^2 + y^2 \leq 1$，$f(x,y)$ 在 D 上连续.

(1) 求证：$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) 求 $\iint\limits_D (\sin^2 x + \cos^2 y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析　(1) 作标准的极坐标变换 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$，则面积微元为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$，所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

再作非标准的极坐标变换 $x = \rho\sin\theta$，$y = \rho\cos\theta$，则面积微元为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$，所以

$$\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)|J|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

于是有$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 利用(1) 的结论得

$$\iint\limits_D (\sin^2 x + \cos^2 y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (\sin^2 y + \cos^2 x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2}\iint\limits_D (\sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_D (1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\end{aligned}$$

5.2.3　三重积分的计算(例 5.24—5.28)

例 5.24(南京大学 1996 年竞赛题)　设 $f(x)$ 连续，$f(0)=k$，V_t 由 $0 \leqslant z \leqslant k$，$x^2+y^2 \leqslant t^2$ 确定，试求 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F(t)}{t^2}$，其中 $F(t) = \iiint\limits_{V_t}[z^2 + f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解析　记 $D: x^2+y^2 \leqslant t^2$，则

$$\begin{aligned}F(t) &= \iiint\limits_{V_t}[z^2 + f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^k z^2\mathrm{d}z + \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^k f(x^2+y^2)\mathrm{d}z \\ &= \frac{k^3}{3}\pi t^2 + k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho \xlongequal{\text{令}\rho^2=u} \frac{k^3}{3}\pi t^2 + \pi k\int_0^{t^2} f(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{t\to 0+}\frac{F(t)}{t^2} = \frac{\pi}{3}k^3 + \lim_{t\to 0+}\frac{\pi k\int_0^{t^2} f(u)\mathrm{d}u}{t^2} \\ &= \frac{\pi}{3}k^3 + \lim_{t\to 0+}\frac{\pi k 2t f(t^2)}{2t} = \frac{\pi}{3}k^3 + \pi k^2\end{aligned}$$

例 5.25(江苏省 2006 年竞赛题)　曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z=1$，$z=2$ 所围成的立体区域记为 Ω.

(1) 求 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

(2) 求 $\iiint\limits_\Omega \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解析　曲面方程为 $x^2+y^2 = 2z$，记 $D(z)$：$x^2+y^2 \leqslant (\sqrt{2z})^2$.

(1) **方法 1**

$$\text{原式}=\int_1^2 dz\iint\limits_{D(z)}(x^2+y^2+z^2)dxdy=\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(\rho^2+z^2)\rho d\rho$$
$$=2\pi\int_1^2(z^2+z^3)dz=\frac{73}{6}\pi$$

方法 2

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2(\rho^2+z^2)dz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^1(\rho^2+z^2)dz$$
$$=2\pi\int_0^2\left(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5+\frac{8}{3}\rho-\frac{1}{24}\rho^7\right)d\rho-2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho^3-\frac{\rho^5}{2}+\frac{1}{3}\rho-\frac{\rho^7}{24}\right)d\rho$$
$$=\frac{40}{3}\pi-\frac{7}{6}\pi=\frac{73}{6}\pi$$

(2) $$\text{原式}=\int_1^2 dz\iint\limits_{D(z)}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdy=\int_1^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\frac{\rho}{\rho^2+z^2}d\rho$$
$$=2\pi\int_1^2\frac{1}{2}\ln(\rho^2+z^2)\Big|_0^{\sqrt{2z}}dz=\pi\int_1^2\ln\left(1+\frac{2}{z}\right)dz$$
$$=\pi z\ln\left(1+\frac{2}{z}\right)\Big|_1^2+\pi\int_1^2\frac{2}{2+z}dz$$
$$=\pi\ln\frac{4}{3}+2\pi\ln\frac{4}{3}=3\pi\ln\frac{4}{3}$$

例 5.26(南京大学 1993 年竞赛题) 求$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$,其中$\Omega$为由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的立体.

解析 **方法 1**(用球坐标变换) 令

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

则$0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,故

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin^2\varphi dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi=\frac{\pi}{16}(\pi-2)$$

方法 2(用柱坐标变换) 令

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z$$

则$\rho\leqslant z\leqslant\sqrt{1-\rho^2}$, $0\leqslant\rho\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,故

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}d\rho\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}}\rho^2dz=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rho^2(\sqrt{1-\rho^2}-\rho)d\rho=\frac{\pi}{16}(\pi-2)$$

例 5.27(北京市 1997 年竞赛题)　设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = m$，试求$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解析　令 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0, F(1)=m, F'(u)=f(u)$. 由于

$$\int_x^y f(z)\mathrm{d}z = F(u)\Big|_x^y = F(y)-F(x)$$

$$\begin{aligned}&\int_x^1 f(y)[F(y)-F(x)]\mathrm{d}y\\ =&\int_x^1 [F(y)-F(x)]\mathrm{d}F(y) = \int_x^1 F(y)\mathrm{d}F(y) - \int_x^1 F(x)\mathrm{d}F(y)\\ =&\frac{1}{2}F^2(y)\Big|_x^1 - F(x)F(y)\Big|_x^1 = \frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}F^2(x)-mF(x)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 f(x)\left[\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}F^2(x)-mF(x)\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left[\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}F^2(x)-mF(x)\right]\mathrm{d}F(x)\\ &= \left[\frac{1}{2}m^2F(x)+\frac{1}{6}F^3(x)-\frac{1}{2}mF^2(x)\right]\Bigg|_0^1\\ &= \frac{1}{2}m^3+\frac{1}{6}m^3-\frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{6}m^3\end{aligned}$$

例 5.28(江苏省 2002 年竞赛题)　设 $f(u)$ 在 $u=0$ 可导，$f(0)=0$，Ω: $x^2+y^2+z^2\leqslant 2tz$，求$\lim\limits_{t\to0+}\frac{1}{t^5}\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$.

解析　先用球坐标计算三重积分，有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos\frac{r}{2t}} f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\pi\int_0^{2t} r^2 f(r^2)(-\cos\varphi)\Big|_0^{\arccos\frac{r}{2t}}\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\int_0^{2t} r^2 f(r^2)\cdot\left(1-\frac{r}{2t}\right)\mathrm{d}r\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2\pi\lim_{t\to0+}\frac{t\int_0^{2t} r^2 f(r^2)\mathrm{d}r - \frac{1}{2}\int_0^{2t} r^3 f(r^2)\mathrm{d}r}{t^6}\\ &= 2\pi\lim_{t\to0+}\frac{\int_0^{2t} r^2 f(r^2)\mathrm{d}r}{6t^5} = 2\pi\lim_{t\to0+}\frac{2(2t)^2 f(4t^2)}{30t^4}\end{aligned}$$

$$= \frac{32}{15}\pi \lim_{t \to 0^+} \frac{f(4t^2) - f(0)}{4t^2} = \frac{32}{15}\pi f'(0)$$

5.2.4 与重积分有关的不等式的证明(例 5.29—5.36)

例 5.29(北京市 2001 年竞赛题) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，证明：

$$\int_0^1 e^{f(x)}dx \int_0^1 e^{-f(y)}dy \geqslant 1$$

解析 原式可化为下面两种形式的二重积分：

$$原式 = \iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy = \iint_D e^{f(y)-f(x)}dxdy$$

其中 D 为 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$，于是

$$\begin{aligned} 原式 &= \frac{1}{2}\iint_D (e^{f(x)-f(y)} + e^{f(y)-f(x)})dxdy \\ &\geqslant \frac{1}{2}\iint_D 2\sqrt{1}\,dxdy = 1 \end{aligned}$$

例 5.30(清华大学 1985 年竞赛题) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减，又 $f(x) > 0$，求证：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

并给予物理解释.

解析 由于 $f(x) > 0$，$f(y) > 0$，$[f(x) - f(y)](x - y) \leqslant 0$，所以

$$f(x)f(y)[f(x) - f(y)](x - y) \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x)f(y)[xf(x) + yf(y)] \leqslant f(x)f(y)[xf(y) + yf(x)]$$

$$\Leftrightarrow \qquad xf^2(x)f(y) + yf^2(y)f(x) \leqslant xf(x)f^2(y) + yf(y)f^2(x)$$

应用二重积分的保向性，取 $D:\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，则

$$\iint_D [xf^2(x)f(y) + yf^2(y)f(x)]dxdy \leqslant \iint_D [xf(x)f^2(y) + yf(y)f^2(x)]dxdy$$

由于

$$\begin{aligned} &\iint_D [xf^2(x)f(y) + yf^2(y)f(x)]dxdy \\ &= \int_0^1 xf^2(x)dx \cdot \int_0^1 f(y)dy + \int_0^1 yf^2(y)dy \cdot \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\iint_D [xf(x)f^2(y) + yf(y)f^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y \cdot \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

故有

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

物理解释：两根长为 1 的直杆放在 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，第一根直杆的线密度函数为 $f^2(x)$，其重心坐标为 x_1，第二根直杆的线密度函数为 $f(x)$，其重心坐标为 x_2，则 $x_1 \leqslant x_2$，这里 $x_1 = \dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}$，$x_2 = \dfrac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.

例 5.31（莫斯科化工机械学院 1977 年竞赛题）　求证不等式

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) < \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^2 < \frac{\pi}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \quad (x > 0)$$

解析　取 $D = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant x,\ 0 \leqslant v \leqslant x\}$，则

$$\iint_D \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u \cdot \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^2 \tag{1}$$

取 $D_1 = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leqslant x^2, u \geqslant 0, v \geqslant 0\}$，$D_2 = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leqslant 2x^2, u \geqslant 0, v \geqslant 0\}$，则 D_1 为 D 的真子集，D 为 D_2 的真子集，而 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} > 0$，所以

$$\iint_D \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v > \iint_{D_1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\right)\Big|_0^x = \frac{\pi}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right) \tag{2}$$

$$\iint_D \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v < \iint_{D_2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}x} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \tag{3}$$

综合(1),(2),(3)式即得原不等式成立.

例 5.32(广东省 1991 年竞赛题)　设 D 域是 $x^2+y^2\leqslant 1$,试证明不等式

$$\frac{61}{165}\pi\leqslant\iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{2}{5}\pi$$

解析　运用极坐标变换,有

$$\iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\sin(\rho^3)\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^1\rho\sin(\rho^3)\,\mathrm{d}\rho$$

下面先证明:$x\geqslant 0$ 时,有 $\sin x\leqslant x,\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{6}$. 令 $f(x)=x-\sin x$,则 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,于是 $f(x)$ 单调增加,$f(x)\geqslant f(0)=0$,即 $\sin x\leqslant x$. 令 $g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$,则 $g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$,$g''(x)=-\sin x+x\geqslant 0$,于是 $g'(x)$ 单调增加,$g'(x)\geqslant g'(0)=0$,$g(x)$ 单调增加,$g(x)\geqslant g(0)=0$,即 $\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{6}$.

取 $x=\rho^3(\rho\geqslant 0)$,得 $\sin(\rho^3)\leqslant\rho^3,\sin(\rho^3)\geqslant\rho^3-\frac{\rho^9}{6}$.

设原二重积分的值为 I,于是

$$I\leqslant 2\pi\int_0^1\rho\cdot\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\frac{2}{5}\pi,\quad I\geqslant 2\pi\int_0^1\rho\left(\rho^3-\frac{\rho^9}{6}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{61}{165}\pi$$

即 $\frac{61}{165}\pi\leqslant\iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{2}{5}\pi$.

例 5.33(江苏省 2004 年竞赛题)　求证:$\frac{3}{2}\pi<\iiint_\Omega\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}V<3\pi$,其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

解析　首先求 $f=x+2y-2z+5$ 在 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 上的最大值与最小值. 在 $x^2+y^2+z^2<1$ 的内部,由于

$$f'_x=1\neq 0,\quad f'_y=2\neq 0,\quad f'_z=-2\neq 0$$

故 f 在 $x^2+y^2+z^2<1$ 上无驻点. 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 上应用拉格朗日乘数法,令

$$F=x+2y-2z+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

由

$$\begin{cases}F'_x=1+2\lambda x=0,\\F'_y=2+2\lambda y=0,\\F'_z=-2+2\lambda z=0,\\F'_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$$

解得可疑的条件极值点 $P_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$P_2\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. 由于连续函数 f 在有界闭集 $x^2+y^2+z^2=1$ 上有最大值和最小值，所以 $f(P_1)=8$，$f(P_2)=2$ 分别是 f 的最大值与最小值. 又由于 f 与 $f^{\frac{1}{3}}$ 有相同的极值点，故

$$\sqrt[3]{2}\leqslant\sqrt[3]{f}=\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\leqslant\sqrt[3]{8}$$

由积分的保向性得

$$\sqrt[3]{2}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V\leqslant\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}V\leqslant 2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$$

由于 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$，因此

$$\frac{3}{2}\pi<\sqrt[3]{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\leqslant\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}V\leqslant 2\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi<3\pi$$

例 5.34（全国大学生 2014 年决赛题）　设 $I=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续的二阶偏导数. 若对任何 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leqslant A$，证明：$I\leqslant\frac{A}{4}$.

解析　将二重积分化为二次积分，再分部积分得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}(y-1)$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\left((y-1)f(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1(y-1)\,f'_y(x,y)\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\left(0-(-f(x,0))-\int_0^1(y-1)\,f'_y(x,y)\mathrm{d}y\right)$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(y-1)\,f'_y(x,y)\mathrm{d}y\quad\text{（下面交换积分次序，再分部积分）}$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(y-1)f'_y(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(y-1)f'_y(x,y)\mathrm{d}(x-1)$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\left((x-1)(y-1)f'_y(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1(x-1)(y-1)f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\left(0-(-(y-1)f'_y(0,y))-\int_0^1(x-1)(y-1)f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x-1)(y-1)\,f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x=\iint\limits_{D}(x-1)(y-1)\,f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant A\iint\limits_{D}(x-1)(y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\,\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^1\cdot\frac{1}{2}(y-1)^2\Big|_0^1=\frac{A}{4}$$

例 5.35(广东省 1991 年竞赛题)　设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上具有连续的四阶偏导数,并且 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界上恒为 0,且 $\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\leqslant 3$,试证明:$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\dfrac{1}{48}$.

$\left(\text{提示:考虑二重积分}\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}\sigma\right)$

解析　考察上述二重积分,运用分部积分法,有

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 x(1-x)\left[y(1-y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\bigg|_0^1+\int_0^1(2y-1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1(2y-1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 x(1-x)\left[(2y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_0^1-2\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 x(1-x)\left[\frac{\partial^2 f(x,1)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x-2\int_0^1\left[\int_0^1 x(1-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&=x(1-x)[f_x'(x,1)+f_x'(x,0)]\Big|_0^1+\int_0^1(2x-1)[f_x'(x,1)+f_x'(x,0)]\mathrm{d}x\\
&\quad-2\int_0^1\left[x(1-x)f_x'(x,y)\Big|_0^1+\int_0^1(2x-1)f_x'(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&=0+(2x-1)[f(x,1)+f(x,0)]\Big|_0^1-2\int_0^1[f(x,1)+f(x,0)]\mathrm{d}x\\
&\quad-2\int_0^1\left[(2x-1)f(x,y)\Big|_0^1-2\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&=4\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|&=\frac{1}{4}\left|\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}\sigma\right|\\
&\leqslant\frac{3}{4}\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1\cdot\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^1=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{48}
\end{aligned}
$$

例 5.36(全国大学生 2015 年预赛题)　设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数,$f(0,0)=0$,$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$,$(f_{xx}'')^2+2(f_{xy}'')^2+(f_{yy}'')^2\leqslant$

M,证明:$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

解析 将函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处展为一阶马克劳林展开式,有

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + xf'_x(0,0) + yf'_y(0,0) + \frac{1}{2}[x^2 f''_{xx}(\theta x,\theta y) \\ &\quad + 2xyf''_{xy}(\theta x,\theta y) + y^2 f''_{yy}(\theta x,\theta y)] \\ &= \frac{1}{2}[x^2 f''_{xx}(\theta x,\theta y) + 2xyf''_{xy}(\theta x,\theta y) + y^2 f''_{yy}(\theta x,\theta y)] \end{aligned}$$

应用柯西-施瓦兹不等式得

$$\begin{aligned} &[x^2 f''_{xx}(\theta x,\theta y) + 2xyf''_{xy}(\theta x,\theta y) + y^2 f''_{yy}(\theta x,\theta y)]^2 \\ &= [x^2 \cdot f''_{xx}(\theta x,\theta y) + \sqrt{2}xy \cdot \sqrt{2}f''_{xy}(\theta x,\theta y) + y^2 \cdot f''_{yy}(\theta x,\theta y)]^2 \\ &\leqslant (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \cdot [(f''_{xx}(\theta x,\theta y))^2 + 2(f''_{xy}(\theta x,\theta y))^2 + (f''_{yy}(\theta x,\theta y))^2] \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2) \cdot \sqrt{(f''_{xx}(\theta x,\theta y))^2 + 2(f''_{xy}(\theta x,\theta y))^2 + (f''_{yy}(\theta x,\theta y))^2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{M}(x^2+y^2) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &\leqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{M}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^3\mathrm{d}\rho = \frac{\pi\sqrt{M}}{4} \end{aligned}$$

5.2.5 曲线积分的计算(例 5.37—5.42)

例 5.37(南京大学 1996 年竞赛题) 求 $\oint_C (x^2+y^2)^2\mathrm{d}s$,其中曲线 C 由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=y \end{cases}$ 给定.

解析 曲线 C 的参数方程为 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $z=\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^4 \cdot \sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2+[z'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \left(\frac{3}{8}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{32}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

例 5.38(江苏省 2016 年竞赛题)　设 Γ 为曲线 $y=2^x+1$ 上从点 $A(0,2)$ 到点 $B(1,3)$ 的一段弧,试求曲线积分 $\int_\Gamma e^{xy}(1+xy)dx+e^{xy}x^2dy$.

解析　**方法 1**　记 $P=e^{xy}(1+xy),Q=e^{xy}x^2$,因

$$Q'_x=xe^{xy}(xy+2),\quad P'_y=xe^{xy}(xy+2)$$

即 $Q'_x\equiv P'_y$,所以曲线积分与路径无关. 取点 $A(0,2)$ 到点 $B(1,3)$ 的折线段为 $\overline{AC}+\overline{CB}$($C$ 为点$(1,2)$),则

$$\begin{aligned}原式&=\int_{\overline{AC}}e^{xy}(1+xy)dx+e^{xy}x^2dy+\int_{\overline{CB}}e^{xy}(1+xy)dx+e^{xy}x^2dy\\&=\int_0^1e^{2x}(1+2x)dx+\int_2^3e^ydy=xe^{2x}\Big|_0^1+e^y\Big|_2^3=e^3\end{aligned}$$

方法 2　将曲线方程代入被积表达式化为定积分得

$$\begin{aligned}原式&=\int_0^1e^{x(2^x+1)}(1+x(2^x+1)+x^22^x\ln2)dx\\&=\int_0^1e^{x(2^x+1)}dx+\int_0^1xde^{x(2^x+1)}\\&=\int_0^1e^{x(2^x+1)}dx+xe^{x(2^x+1)}\Big|_0^1-\int_0^1e^{x(2^x+1)}dx=e^3\end{aligned}$$

例 5.39(南京工业大学 2009 年竞赛题)　设 Γ 是由点$(1,0)$ 经 $y=1-x^2$ 到$(-1,0)$ 曲线段,则$\int_\Gamma\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=$ ________.

解析　令 $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

所以在不包含$(0,0)$ 的单连通区域内,$\int_\Gamma Pdx+Qdy$ 与路径无关. 作圆 $x^2+y^2=1(y\geqslant0)$,从$(1,0)$ 到$(-1,0)$ 的上半圆周记为 L,则 $L:x=\cos\theta,y=\sin\theta,\theta$ 从 0 到 π,故

$$\begin{aligned}原式&=\int_LPdx+Qdy=\int_0^\pi\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta}{1}d\theta\\&=\int_0^\pi1d\theta=\pi\end{aligned}$$

例 5.40(全国大学生 2009 年预赛题)　设平面区域 $D=\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界,试证:

(1) $\oint_Lxe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_Lxe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x \geqslant \frac{5}{2}\pi^2$.

解析　(1) 设正方形曲线 L 的 4 个顶点按逆时针排分别为 O,A,B,C,则

$$\begin{aligned}
&\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x \\
=&\int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CO}} = 0 + \int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y + \int_{\pi}^{0} - \pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x + 0 \\
=&\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x \\
&\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x \\
=&\int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CO}} = 0 + \int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y + \int_{\pi}^{0} - \pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x + 0 \\
=&\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{-\sin x} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

两式右端相等,所以(1) 得证.

(2) 由于 $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \mathrm{e}^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$,所以

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n} \geqslant 2 + x^2 \Rightarrow \mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x} \geqslant 2 + \sin^2 x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

由第(1) 问以及积分的保号性得

$$\begin{aligned}
\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x &= \pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x \\
&\geqslant \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\pi^2
\end{aligned}$$

例 5.41(江苏省 2012 年竞赛题)　已知 Γ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 6y$ 与 $x^2 + y^2 = 4y(z \geqslant 0)$ 的交线,从 z 轴正向看上去为逆时针方向,计算曲线积分

$$\oint_{\Gamma}(x^2 + y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (y^2 + z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (z^2 + x^2 - y^2)\mathrm{d}z$$

解析　**方法 1**　记曲线 Γ 的 $x \geqslant 0$ 的部分与 $x \leqslant 0$ 的部分分别为 Γ_1 与 Γ_2,其参数方程分别为

$$\Gamma_1: x = \sqrt{4t - t^2}, y = t, z = \sqrt{2t}, t\text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 4$$
$$\Gamma_2: x = -\sqrt{4t - t^2}, y = t, z = \sqrt{2t}, t\text{ 从 } 4 \text{ 变到 } 0$$

分别在 Γ_1 和 Γ_2 上积分,有

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma_1}(x^2 + y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (y^2 + z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (z^2 + x^2 - y^2)\mathrm{d}z \\
=&\int_0^4\left[\left(\frac{2t(2 - t)}{\sqrt{4t - t^2}} + 2(t^2 - t) + \sqrt{2}\,\frac{3t - t^2}{\sqrt{t}}\right)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\oint_{\Gamma_1}(x^2+y^2-z^2)\mathrm{d}x+(y^2+z^2-x^2)\mathrm{d}y+(z^2+x^2-y^2)\mathrm{d}z$$
$$=\int_4^0\left[\left(\frac{-2t(2-t)}{\sqrt{4t-t^2}}+2(t^2-t)+\sqrt{2}\,\frac{3t-t^2}{\sqrt{t}}\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^4\left[\left(\frac{2t(2-t)}{\sqrt{4t-t^2}}-2(t^2-t)-\sqrt{2}\,\frac{3t-t^2}{\sqrt{t}}\right)\right]\mathrm{d}t$$

两式相加,则

$$原式=4\int_0^4\frac{t(2-t)}{\sqrt{4t-t^2}}\mathrm{d}t\xlongequal{令 t-2=u}4\int_{-2}^2\frac{-(2+u)u}{\sqrt{4-u^2}}\mathrm{d}u$$
$$=-8\int_0^2\frac{u^2}{\sqrt{4-u^2}}\mathrm{d}u\xlongequal{令 u=2\sin t}-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\mathrm{d}t=-8\pi$$

方法 2 记 $P=x^2+y^2-z^2, Q=y^2+z^2-x^2, R=z^2+x^2-y^2$,$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=6y$ 位于交线 Γ 上方的部分,取上侧. 利用斯托克斯公式,则

$$原式=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-2\iint_\Sigma(y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

采用统一投影法计算. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4y\}$,因 $\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y-3}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$,故

$$原式=-2\iint_\Sigma\left((y+z)\frac{x}{z}+(z+x)\frac{y-3}{z}+(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-2\iint_\Sigma\frac{1}{z}(2xy+2yz+2zx-3z-3x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-2\iint_D\frac{x(2y-3)}{\sqrt{6y-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_D(2y+2x-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0-2\iint_D(2y-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(因 D 关于 x=0 对称)$$

即

$$原式=-4\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta}\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho+6\pi\cdot 2^2=-\frac{4}{3}\cdot 64\int_0^\pi\sin^4\theta\mathrm{d}\theta+24\pi$$
$$=-32\pi+24\pi=-8\pi$$

例 5.42(浙江省 2009 年竞赛题) 设 $R(x,y,z)=\int_0^{x^2+y^2}f(z-t)\mathrm{d}t$,其中 f 的导函数连续,曲面 S 为 $z=x^2+y^2$ 被 $y+z=1$ 所截的下面部分,取内侧,L 为 S 的

正向边界,求

$$\oint_L 2xzf(z-x^2-y^2)\mathrm{d}x+[x^3+2yzf(z-x^2-y^2)]\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

解析　因为在 L 上 $z=x^2+y^2$,所以

$$R(x,y,z)\Big|_L=\int_0^z f(z-t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } z-t=u}-\int_z^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^z f(t)\mathrm{d}t$$

记 $R(z)=\int_0^z f(t)\mathrm{d}t$,代入原式化简,有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\oint_L 2xzf(0)\mathrm{d}x+[x^3+2yzf(0)]\mathrm{d}y+R(z)\mathrm{d}z\\&=\oint_L f(0)(x^2+y^2)(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)+x^3\mathrm{d}y+R(z)\mathrm{d}z\\&=f(0)\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)+\oint_L x^3\mathrm{d}y+R(z)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}f(0)\,(x^2+y^2)^2\Big|_A^A+\oint_L x^3\mathrm{d}y+R(z)\mathrm{d}z=\oint_L x^3\mathrm{d}y+R(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

这里 A 为曲线 L 上任一点. 记 $P=0,Q=x^3,R=R(z)$,应用斯托克斯公式,则

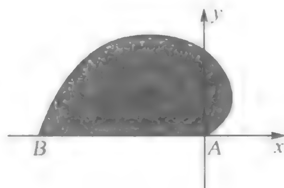
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S 3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

曲面 S 在 $O-xy$ 平面上的投影为 $D=\left\{(x,y)\,\Big|\,x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{5}{4}\right\}$,$D$ 关于 $x=0$ 对称,于是

$$\text{原式}=3\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}-x^2}}x^2\mathrm{d}y=12\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}x^2\sqrt{\frac{5}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } x=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin u}\frac{12\times25}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4t}{2}\mathrm{d}t=\frac{75}{64}\pi$$

5.2.6　应用格林公式解题(例 5.43—5.53)



例 5.43(江苏省 1998 年竞赛题)　若 $\varphi(y)$ 的导数连续,$\varphi(0)=0$,曲线 $\widehat{AB}$ 的极坐标方程为 $\rho=a(1-\cos\theta)$,其中 $a>0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,$A$ 与 B 分别对应于 $\theta=0$ 与 $\theta=$

π,求$\int_{\overset{\frown}{AB}}[\varphi(y)e^x-\pi y]dx+[\varphi'(y)e^x-\pi]dy$.

解析 设曲线$\overset{\frown}{AB}$与线段$\overline{BA}$所围区域为D(如上图所示),又设

$$P=\varphi(y)e^x-\pi y,\quad Q=\varphi'(y)e^x-\pi$$

应用格林公式,有

$$\begin{aligned}\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}P\,dx+Q\,dy&=\iint_D(Q'_x-P'_y)dxdy=\iint_D\pi dxdy\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\rho^2 d\theta=\frac{a^2\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta\\&=\frac{a^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=\frac{3}{4}a^2\pi^2\end{aligned}$$

由于$\int_{\overline{BA}}P\,dx+Q\,dy=\int_{-2a}^{0}P(x,0)dx=\int_{-2a}^{0}\varphi(0)e^x dx=0$,于是

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}P\,dx+Q\,dy=\frac{3}{4}a^2\pi^2$$

例 5.44(全国大学生 2012 年决赛题) 设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$(其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数)惟一确定,L 为正向单位圆周,试求

$$I=\oint_L(xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx$$

解析 记 $f(x,y,z)=F(xz-y,x-yz)$,应用隐函数方程求偏导数公式有

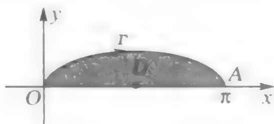
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}=-\frac{zF'_u+F'_v}{xF'_u-yF'_v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-F'_u-zF'_v}{xF'_u-yF'_v}$$

记 $P=-(2xz+yz^2)$,$Q=xz^2+2yz$,单位圆包围的区域记为D,应用格林公式有

$$\begin{aligned}I&=\iint_D(Q'_x-P'_y)dxdy=\iint_D\left[\left(z^2+2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(2x\frac{\partial z}{\partial y}+z^2+2yz\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]dxdy\\&=\iint_D\left(2z^2-2xz\frac{zF'_u+F'_v}{xF'_u-yF'_v}-2y\frac{zF'_u+F'_v}{xF'_u-yF'_v}+2x\frac{F'_u+zF'_v}{xF'_u-yF'_v}\right.\\&\qquad\left.+2yz\frac{F'_u+zF'_v}{xF'_u-yF'_v}\right)dxdy\\&=\iint_D(2z^2+2-2z^2)dxdy=2\iint_D dxdy=2\pi\end{aligned}$$

例 5.45(江苏省 2006 年竞赛题) 已知Γ是 $y=a\sin x(a>0)$ 上从$(0,0)$到$(\pi,0)$的一段曲线,$a=$ ________ 时,曲线积分$\int_{\Gamma}(x^2+y)dx+(2xy+e^{y^2})dy$取最

大值.



解析　设 Γ 与 $\overline{AO}$ 所围区域为 D(如图所示),在 D 上应用格林公式,记 $P=x^2+y$, $Q=2xy+e^{y^2}$,则

$$\int_{\Gamma+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint_D(Q'_x-P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(2y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{a\sin x}(1-2y)\mathrm{d}y$$

$$=a\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=2a-\frac{\pi}{2}a^2$$

$$I=\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=2a-\frac{a^2}{2}\pi-\int_{\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=2a-\frac{a^2}{2}\pi+\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=2a-\frac{a^2}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi^3$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a}=2-a\pi=0$ 得惟一驻点 $a=\dfrac{2}{\pi}$,由于 $\dfrac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}a^2}=-\pi<0$,所以 $I\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ 为极大值,即最大值,故 $a=\dfrac{2}{\pi}$.

例 5.46(江苏省 2008 年竞赛题)　设 Γ 为 $x^2+y^2=2x(y\geqslant 0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段弧,连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x^2+\int_{\Gamma}y[f(x)+e^x]\mathrm{d}x+(e^x-xy^2)\mathrm{d}y$$

求 $f(x)$.

解析　设 $\int_{\Gamma}y[f(x)+e^x]\mathrm{d}x+(e^x-xy^2)\mathrm{d}y=a$,则 $f(x)=x^2+a$,记 Γ 与 $\overline{AO}$ 包围的区域为 D,应用格林公式,有

$$a=\int_{\Gamma+\overline{AO}}y[f(x)+e^x]\mathrm{d}x+(e^x-xy^2)\mathrm{d}y-\int_{\overline{AO}}y[f(x)+e^x]\mathrm{d}x+(e^x-xy^2)\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(e^x-y^2-x^2-a-e^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho+\frac{\pi}{2}a$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{2}a=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}a$$

解得 $a=\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$,于是 $f(x)=x^2+\dfrac{3\pi}{2(2-\pi)}$.

例 5.47(北京市 1996 年竞赛题) 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D: $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$,证明:$\displaystyle\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

解析 运用极坐标变换,有

$$\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}(\rho\cos\theta f_x'+\rho\sin\theta f_y')\mathrm{d}\theta$$

其中 $\int_0^{2\pi}(\rho\cos\theta f_x'+\rho\sin\theta f_y')\mathrm{d}\theta$ 可看作沿半径为 $\rho(0\leqslant\rho\leqslant 1)$ 的圆周 L 的逆向的曲线积分. 因 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,所以 $\mathrm{d}x=-\rho\sin\theta\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y=\rho\cos\theta\mathrm{d}\theta$. 记 D_1 是半径为 ρ 的圆域,应用格林公式,上述积分化为

$$\begin{aligned}\int_0^1\rho\oint_L[-f_y'\mathrm{d}x+f_x'\mathrm{d}y]\mathrm{d}\rho&=\int_0^1\rho\left[\iint_{D_1}(f_{xx}''+f_{yy}'')\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^1\rho\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\rho\mathrm{e}^{-t^2}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\rho\\&=\pi\int_0^1(1-\mathrm{e}^{-\rho^2})\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}\end{aligned}$$

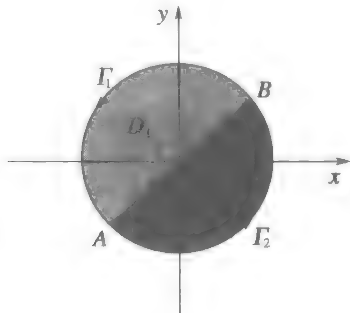
例 5.48(精选题) 求曲线积分 $\int_\Gamma|y-x|\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$,其中 Γ 为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$$

其方向与 z 轴正方满足右手法则.

解析 曲线 Γ 的方程可写为

$$x^2+y^2=\frac{3}{4},\quad z=\frac{1}{2}$$



将 Γ 的位于 $y=x$ 上方的部分记为 Γ_1,位于 $y=x$ 下方的部分记为 Γ_2,Γ 与 $y=x$ 的交点记为 A,B(如图). 将 Γ 所围的圆域用 $\overline{AB}$ 分为 D_1 与 D_1,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_{\Gamma_1}(y-x)\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2}(x-y)\mathrm{d}y+0\\&=\int_{\Gamma_1+\overline{AB}}(y-x)\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2+\overline{BA}}(x-y)\mathrm{d}y\quad(\text{应用格林公式})\\&=\iint_{D_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y-x)-\frac{\partial}{\partial y}0\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y)-\frac{\partial}{\partial y}0\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_1}(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}=0\end{aligned}$$

例 5.49(江苏省 1996 年竞赛题)　计算曲线积分 $\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

(1) C 是正向圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$;

(2) C 是正向曲线 $|x|+|y|=1$.

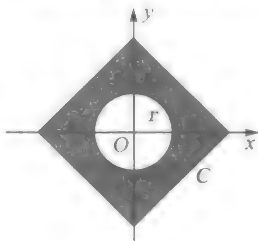
解析　记 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$,则

$$Q'_x = P'_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(1) 设 $D_1:(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2$, P, Q 在 D_1 内偏导数连续,应用格林公式,有

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{D_1}(Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

(2) 设 D_2: $|x|+|y|\leqslant 1$, P 和 Q 在 D_2 内偏导数不连续,故不能应用格林公式. 在 C 内作圆 Γ: $x^2+y^2=\varepsilon^2\left(0<\varepsilon<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,取负向.



设 C 与 Γ 包围的区域为 D_3(如图所示),在区域 D_3 上应用格林公式,有

$$\int_{C+\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_{D_3}(Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

由 Γ 的参数方程 $x=\varepsilon\cos\theta$, $y=\varepsilon\sin\theta$,得

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = -\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_{\Gamma-}\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

例 5.50(精选题)　已知 $P(x,y)=\frac{axy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q(x,y)=\frac{-4yx^\lambda}{(x^2+y^2)^2}$. (1) 求常数 a 和 λ,使得 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2>0\}$ 上与路径无关;(2) 求 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 中的原函数.

解析　(1) 在区域 D 上, $P,Q\in C^{(1)}$,由于曲线积分与路径无关的充要条件是 $P'_y=Q'_x$,而

$$P'_y = \frac{2axy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3},\quad Q'_x = \frac{-4x^{\lambda-1}y[\lambda(x^2+y^2)-4x^2]}{(x^2+y^2)^3}$$

所以 $\lambda-1=1$, $4\lambda=2a$,即 $\lambda=2$, $a=4$,此时

$$P=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},\quad Q=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

(2) 令 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$，则 $u'_x=P, u'_y=Q$，于是

$$u(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\int\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x+\varphi(y)$$
$$=-\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\varphi(y)$$

代入 $u'_y=Q$ 得

$$-2\frac{2y(x^2+y^2)-y^2 2y}{(x^2+y^2)}+\varphi'(y)=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

即 $\varphi'(y)=0$. 取 $\varphi(y)=C$，得所求的原函数为 $u=-\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}+C$.

例 5.51(江苏省 2004 年竞赛题)　设 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$，G 为不包含原点的单连通域，任取 $M,N\in G$，在 G 内曲线积分 $\int_M^N\frac{1}{2x^2+f(y)}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$ 与路径无关.

(1) 求 $f(x)$；

(2) 求 $\int_\Gamma\frac{1}{2x^2+f(y)}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$，其中 Γ 为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，取正向.

解析　记 $P(x,y)=\dfrac{y}{2x^2+f(y)}$，$Q(x,y)=\dfrac{-x}{2x^2+f(y)}$，因为在 G 内曲线积分 $\int_M^N P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，所以 $\forall(x,y)\in G$，有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$$\frac{2x^2-f(y)}{(2x^2+f(y))^2}=\frac{2x^2+f(y)-yf'(y)}{(2x^2+f(y))^2}$$

由此推得 $yf'(y)=2f(y)$，又 $f(1)=1$，解此变量可分离的微分方程得 $f(y)=y^2$. 于是 $f(x)=x^2$.

取小椭圆 $\Gamma_\varepsilon: 2x^2+y^2=\varepsilon^2$，取正向，$\varepsilon$ 为充分小的正数，使得 Γ_ε 位于 Γ 的内部. 设 Γ 与 Γ_ε 所包围的区域为 D. 在 D 上，P 和 Q 的一阶偏导数连续，且 $Q'_x=P'_y$，应用格林公式得

$$\int_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D(Q'_x-P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

这里 Γ_ε^- 为负向(即顺时针方向)，于是

$$\text{原式}=\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{\Gamma_\varepsilon^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\Gamma_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\varepsilon^2\cos^2\theta}{\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}\theta=-\sqrt{2}\pi$$

例 5.52(莫斯科钢铁与合金学院 1976 年竞赛题)　计算曲线积分

$$\oint_L \frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2 + v^2}$$

其中 $u = ax + by, v = cx + dy(ad - bc \neq 0)$, L 为 xy 平面上环绕坐标原点的单闭曲线,取逆时针方向.

解析 将 $u = ax + by, v = cx + dy$ 代入原式得

$$原式 = (ad - bc)\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}$$

记 $P = \dfrac{-y}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}$, $Q = \dfrac{x}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}$,则

$$Q'_x = P'_y = \frac{(b^2 + d^2)y^2 - (a^2 + c^2)x^2}{[(ax + by)^2 + (cx + dy)^2]^2}$$

由于 $(u,v) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$,所以在 $(x,y) \neq (0,0)$ 的区域上,曲线积分与路线无关.在单闭曲线 L 内部取椭圆 $\Gamma:(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = \rho^2$(逆时针方向),$\rho > 0$ 充分小,则

$$\begin{aligned} 原式 &= (ad - bc)\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2} \\ &= (ad - bc)\frac{1}{\rho^2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = (ad - bc)\frac{1}{\rho^2}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

这里 D 为椭圆 Γ 包围的区域.对上式右边的二重积分作换元变换,令 $u = ax + by$, $v = cx + dy$,则

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{ad - bc}$$

于是

$$\begin{aligned} 原式 &= \frac{ad - bc}{\rho^2} \cdot \iint_{D_1} 2 \mid J \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (D_1 \text{ 为圆域 } u^2 + v^2 = \rho^2) \\ &= \frac{ad - bc}{\rho^2} \frac{2}{\mid ad - bc \mid} \cdot \pi\rho^2 = \pm 2\pi \end{aligned}$$

这里 $\pm$ 的选取是当 $ad - bc > 0$ 时取正号,当 $ad - bc < 0$ 时取负号.

例 5.53(莫斯科电气学院 1976 年竞赛题) 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在全平面上具有连续的一阶偏导数,沿着平面上的任意半圆周 $L: y = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$,曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$,其中 x_0, y_0 为任意实数,R 为任意正实数.求证:(1) $P(x,y) \equiv 0$;(2) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$.

解析 (1) 如下图所示,$\forall (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, $\forall R > 0$,以 (x_0, y_0) 为圆心,以 R 为

半径作上半圆周 L,取逆时针方向,起点为 $A(x_0-R,y_0)$,终点为 $B(x_0+R,y_0)$,则

$$\int_{L+\overline{AB}} P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D (Q'_x-P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1)$$

对(1) 式右端应用积分中值定理,$\exists(\xi,\eta)\in D$,有

$$\iint_D (Q'_x-P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(Q'_x-P'_y)\Big|_{(\xi,\eta)}\cdot\frac{\pi}{2}R^2 \qquad (2)$$

对(1)式左端有

$$\begin{aligned}\int_{L+\overline{AB}} P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{\overline{AB}} P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=0+\int_{x_0-R}^{x_0+R}P(x,y_0)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对此式右端应用定积分中值定理,$\exists c\in(x_0-R,x_0+R)$,有

$$\int_{x_0-R}^{x_0+R}P(x,y_0)\mathrm{d}x=P(c,y_0)\cdot 2R \qquad (3)$$

将(2) 式与(3) 式代入(1) 式得

$$2P(c,y_0)=\frac{1}{2}\pi R\cdot(Q'_x-P'_y)\Big|_{(\xi,\eta)}$$

令 $R\to 0$,此时 $c\to x_0$,$(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)$,得 $P(x_0,y_0)=0$,由 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ 的任意性,即得 $P(x,y)\equiv 0$.

(2)(反证法)假设 $\exists(a,b)\in\mathbf{R}^2$,使得 $Q'_x(a,b)>0$(或 <0). 由于 $Q\in C^{(1)}(\mathbf{R}^2)$,所以 $\exists(a,b)$ 的邻域 U,使得 $Q'_x\big|_{(x,y)\in U}>0$(或 <0),在邻域 U 内取上半圆周 L,则

$$\int_{L+\overline{AB}} P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\overline{AB}} Q\mathrm{d}y=0=\iint_D Q'_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0 \quad (\text{或}<0)$$

此为矛盾式,故有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$.

5.2.7 曲面积分的计算(例 5.54—5.56)

例 5.54(北京市 1992 年竞赛题) 计算曲面积分

$$I=\iint_S \frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解析 由 S 的对称性,可知

$$I=\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{z\cos^2 z}+\frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

且

$$\iint\limits_{S}\frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\cos^2(-\sqrt{1-x^2-y^2})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{S}\frac{1}{z\cos^2 z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{-\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2(-\sqrt{1-x^2-y^2})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=-4\pi\int_0^1\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{d}(\sqrt{1-\rho^2})\\&=-4\pi\tan\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1=4\pi\tan 1\end{aligned}$$

例 5.55(南京大学1996年竞赛题) 设S表示球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧位于$x^2+y^2-x\leqslant 0$，$z\geqslant 0$的部分，试计算$I=\iint\limits_{S}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析 曲面S在xy平面上的投影为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$$

由于$F=x^2+y^2+z^2-1$，$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=2(x,y,z)$，故

$$\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint\limits_{D}\left(\frac{x^4}{z}+\frac{y^4}{z}+z^3\right)\Big|_{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D}\left(\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$\left(\text{因为}\frac{y^4}{z}\text{关于}y\text{为奇函数},D\text{关于}y=0\text{对称,故}\iint\limits_{D}\frac{y^4}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\right)$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}\rho\int_0^{\arccos\rho} \frac{\rho^4}{\sqrt{1-\rho^2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\rho^4}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\arccos\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\rho^4}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\sqrt{1-\rho^2} - \frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}\rho + \frac{\pi}{4}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\int_0^1\left(\frac{2}{3}\rho^4 + \frac{1}{3}\rho^6\right)\mathrm{d}\rho + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{32}\pi = \frac{38}{105} + \frac{5}{32}\pi$$

例 5.56(精选题) 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} yz(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4Rx-x^2-y^2}\ (R\geqslant 1)$ 在柱面$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1$之内部分的上侧.

解析 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4Rx=0\ (z\geqslant 0)$,则曲面$\Sigma$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x-2R,y,z)$,于是

$$\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x-2R} = \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma}\left[yz(y-z)\frac{1}{z}(x-2R) + zx(z-x)\frac{y}{z} + xy(x-y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2R\iint_{\Sigma} y(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

记曲面Σ 在 xy 平面上的投影区域为 D,D:$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1$,则

$$\text{原式} = 2R\iint_D y\left(\sqrt{4Rx-x^2-y^2}-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2R\iint_D y\sqrt{4Rx-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2R\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0 - 2R\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $x=\dfrac{3}{2}+u$,$y=v$,记 $D_1: u^2+v^2\leqslant 1$,则

$$原式=-2R\iint_{D_1} v^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (u=\rho\cos\theta, v=\rho\sin\theta)$$

$$=-2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-2R\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=-2R\left(\pi\cdot\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}\pi R$$

5.2.8 应用斯托克斯公式解题(例 5.57—5.58)

例 5.57(江苏省 1994 年竞赛题) 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为常向量，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

(1) 证明：$\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(2) 求向量场 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$ 沿闭曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=0\end{cases}$ (从 z 轴正向看依逆时针方向)的环流量.

解析 (1) 记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=a_1x+a_2y+a_3z$. 记 $f=a_1x+a_2y+a_3z$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}&=\nabla\times(f\boldsymbol{b})=f(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\nabla f)\times\boldsymbol{b}\\&=f\boldsymbol{0}+(a_1,a_2,a_3)\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(2) 记$\Sigma:x+y+z=0(x^2+y^2+z^2\leqslant1)$，取上侧，应用斯托克斯公式，则环流量为

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\iint_\Sigma \mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^\circ\mathrm{d}S=\iint_\Sigma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{n}^\circ\mathrm{d}S\\&=\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\iint_\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}\right)\mathrm{d}S=\sqrt3\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\sqrt3\cdot\pi\cdot1^2=\pi\sqrt3\end{aligned}$$

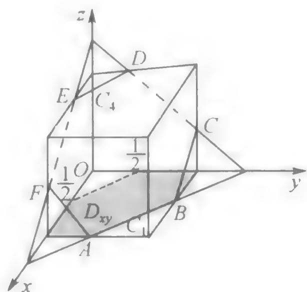
例 5.58(北京市 1991 年竞赛题) 设空间曲线 C 由立方体：$0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant1$，$0\leqslant z\leqslant1$ 的表面与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 相截而成，从 z 轴正向看去，C 取逆时针方向①，计算$\oint_C(z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z$.

解析 如下图所示，设截面上侧部分为曲面 S，它在 xOy 平面上的投影的面积为 $\frac{3}{4}$，S 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，其方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt3}$.

---

①原题没有给出 C 的方向.

令 $P=z^2-y^2, Q=x^2-z^2, R=y^2-x^2$，运用斯托克斯公式，有



$$\oint_C (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S (2y+2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2z+2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_S \left[(y+z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(z+x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(x+y)\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S=\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S \frac{3}{2}\mathrm{d}S$$

$$=2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{2}$$

5.2.9 应用高斯公式解题(例 5.59—5.66)

例 5.59(南京大学 1993 年竞赛题) 设 Γ 为 yOz 平面上的一条闭曲线，S 是以 Γ 为边界的有向光滑曲面的前侧，求

$$\iint_S x(z^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(y^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解析 记

$$P=x(z^2-y^2),\quad Q=y(x^2-z^2),\quad R=z(y^2-x^2)$$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$，故曲面积分与曲面无关. 记闭曲线 Γ 所围的平面区域为 D，取前侧，则

$$\text{原式}=\iint_D P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=+\iint_D x(z^2-y^2)\Big|_{x=0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0+0=0$$

例 5.60(江苏省 2008 年竞赛题) 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$ 的外侧，求

$$\iint_\Sigma xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解析　记$\Sigma_1: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$，取下侧，$P=xz^2, Q=yz^2, R=2z(x^2+y^2)$，应用高斯公式，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint\limits_{\Omega}(P'_x+Q'_y+R'_z)\mathrm{d}V+0 \quad (\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0) \\
&= \iiint\limits_{\Omega}(z^2+z^2+2x^2+2y^2)\mathrm{d}V = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\
&= 4\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{5}r^5\Big|_0^1=\frac{4}{5}\pi
\end{aligned}
$$

例 5.61（江苏省 2016 年竞赛题）　设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=2z$，试求曲面积分

$$
\iint\limits_{\Sigma}(x^4+y^4+z^4-x^3-y^3-z^3+x^2+y^2+z^2-x-y-z)\mathrm{d}S
$$

解析　因曲面Σ关于平面$x=0$对称，又关于平面$y=0$对称，则应用曲面积分的奇偶对称性化简原式得

$$
\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}(x^4+y^4+z^4-z^3+x^2+y^2+z^2-z)\mathrm{d}S
$$

由于$\boldsymbol{n}^\circ=(x,y,z-1)$（外侧），$\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z-1}=\mathrm{d}S$，将原式化为第二型曲面积分，再应用高斯公式计算（其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$），则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint\limits_{\Sigma}[(x^3+x)x+(y^3+y)y+(z^3+z)(z-1)]\mathrm{d}S \\
&= \iint\limits_{\Sigma}(x^3+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r+3\times\frac{4}{3}\pi\times 1^3 \\
&= -\pi\frac{32}{5}\cos^6 x\Big|_0^{\pi/2}+4\pi=\frac{32}{5}\pi+4\pi=\frac{52}{5}\pi
\end{aligned}
$$

例 5.62（南京大学 1995 年竞赛题）　设$\varphi(x,y,z)$为原点到椭球面Σ：

$$
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, b>0, c>0)
$$

上点(x,y,z)处的切平面的距离，求$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S$.

解析　方法1　椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$任一点$P(x,y,z)$处的切平面方程为$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1$，坐标原点到切平面的距离

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

记$u=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$，则$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{u}}$. 于是

$$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}S \tag{1}$$

因椭球面Σ上P点处的外侧法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{u}a^2},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{u}b^2},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{u}c^2}$$

由此化简(1)式得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{（高斯公式）}\\&=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}V=3\cdot\frac{4}{3}\pi abc=4\pi abc\end{aligned}$$

方法2　$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$的求法同方法1，因$\varphi(x,y,z)$分别关于$x,y,z$皆为偶函数. Σ关于$x=0$对称，关于$y=0$对称，关于$z=0$对称，设Σ位于第一卦限的那部分曲面为Σ_1，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S=8\iint\limits_{\Sigma_1}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S \tag{2}$$

曲面Σ_1的方程为$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，$\Sigma_1$在$xy$平面上的投影为$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$，由于

$$z_x' = \frac{-cx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},\quad z_y' = \frac{-cy}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= c\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\varphi(x,y,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

代入(2)式，并令 $x=\rho a\cos\theta, y=\rho b\sin\theta$，则

$$\iint_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}S = 8c\iint_{D_1}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}ab\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 4c\pi ab\left(-\sqrt{1-\rho^2}\right)\Big|_0^1 = 4\pi abc$$

例5.63（全国大学生2011年决赛题）　已知S是空间曲线 $\begin{cases}x^2+3y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转生成的椭球面的上半部分($z\geqslant 0$)，取上侧，Π 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离，λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦，计算：

(1) $\displaystyle\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；

(2) $\displaystyle\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\mathrm{d}S$.

解析　根据题意，可得旋转曲面 S 的方程为 $x^2+3y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$. 曲面 S 上任一点 $P(x,y,z)$ 点处的切平面 Π 的方程为 $xX+3yY+zZ=1$，于是

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$$

记 $\sqrt{u}=\sqrt{x^2+9y^2+z^2}$，则曲面 S 的外法向量的方向余弦为

$$\lambda=\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{u}},\quad \mu=\cos\beta=\frac{3y}{\sqrt{u}},\quad \nu=\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{u}}$$

(1) 令 $\Sigma: z=0(x^2+3y^2\leqslant 1)$，取下侧. 记 S 与 Σ 包围的区域为 Ω，则

$$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S z\sqrt{u}\,\mathrm{d}S = \iint_S\frac{z(x^2+9y^2+z^2)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oiint\limits_{S+\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{（下式应用高斯公式）}$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 6z\mathrm{d}V = 6\int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D(z)} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 6\pi\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\sqrt{\frac{1-z^2}{3}}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

(2) 记号同上，计算过程同上，有

$$\iint\limits_{S} z(\lambda x + 3\mu y + \nu z)\mathrm{d}S = \oiint\limits_{S+\Sigma} zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

例 5.64（江苏省1996年竞赛题） 计算$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$界于$z=0$与$x+y+z=2$之间部分的外侧.

解析 记$\Sigma_1: x+y+z=2$（界于$x^2+y^2\leqslant 1$内的部分），取上侧；记$\Sigma_2: z=0$（界于$x^2+y^2\leqslant 1$内的部分），取下侧. 记Σ、Σ_1、Σ_2所包围的立体区域为Ω. 在Ω上应用高斯公式，记$D: x^2+y^2\leqslant 1$，则

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V = 2\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{2-x-y}(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$= 2\iint\limits_{D}\frac{1}{2}(x+y+z)^2\Big|_0^{2-x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D}[4-(x+y)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\pi - \iint\limits_{D}(x^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\pi - \iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\pi - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^3\mathrm{d}\rho = 4\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$$

又

$$\iint\limits_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_2} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D}[x^2+y^2+(2-x-y)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D}(2x^2+2y^2+4-4x-4y+2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 4\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho + 4\pi = 5\pi$$

于是

$$\text{原式} = 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V - \iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \iint\limits_{\Sigma_2}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{7}{2}\pi - 5\pi - 0 = -\frac{3}{2}\pi$$

例 5.65(江苏省2008年竞赛题) 设Σ为$x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$的外侧,连续函数$f(x,y)$满足

$$f(x,y) = 2(x-y)^2 + \iint\limits_{\Sigma}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+ [zf(x,y) - 2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求$f(x,y)$.

解析 设$\iint\limits_{\Sigma}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$,则$f(x,y) = 2(x-y)^2 + a$.设$D$为$xy$平面上的圆$x^2+y^2\leqslant 1$,$\Sigma_1$为$D$的下侧,$\Omega$为$\Sigma$与$\Sigma_1$包围的区域,应用高斯公式,有

$$a = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \iint\limits_{\Sigma_1}x(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(z^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [zf(x,y)-2\mathrm{e}^z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}[2z^2 + 2(x-y)^2 + a]\mathrm{d}V + \iint\limits_{D}(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}[2(x^2+y^2+z^2) - 4xy + a]\mathrm{d}V - 2\pi$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r - 0 + \frac{2}{3}\pi a - 2\pi = \frac{-6}{5}\pi + \frac{2}{3}\pi a$$

故$a = \dfrac{18\pi}{5(2\pi-3)}$,于是$f(x,y) = 2(x-y)^2 + \dfrac{18\pi}{5(2\pi-3)}$.

例 5.66(全国大学生2016年决赛题) 设$P(x,y,z)$,$R(x,y,z)$在空间上有连续偏导数,记上半球面$S:z = z_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$,方向向上,若对任何点$(x_0,y_0,z_0)$和$r>0$,第二型曲面积分$\iint\limits_{S}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$,证明:$\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$.

解析 记上半球面S的底平面为D,方向向上,D的下侧记为D_1.记$S+D_1$包围的区域为Ω,应用高斯公式得

$$\iint\limits_{S+D_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1}$$

由于$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint\limits_{D_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D R(x,y,z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，代入(1)式得

$$-\iint\limits_D R(x,y,z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2}$$

此式两边分别应用二重积分中值定理和三重积分中值定理得

$$-R(\xi,\zeta,z_0)\pi r^2=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$$

即

$$R(\xi,\zeta,z_0)=-\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot\frac{2}{3}r$$

于是$\lim\limits_{r\to 0}R(\xi,\zeta,z_0)=R(x_0,y_0,z_0)=0$，由点$(x_0,y_0,z_0)$的任意性，即得$R(x,y,z)\equiv 0$，代入(2)式得

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\equiv 0.$$

下面根据上式证明$\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$. 用反证法，若$\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$（不妨设大于0），由于$\frac{\partial P}{\partial x}$连续，所以当正数$r$充分小时，$\frac{\partial P}{\partial x}>0((x,y,z)\in\Omega)$，故$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z>0$. 从而导出矛盾，所以$\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$.

5.2.10　多元函数积分学的应用题(例 5.67—5.76)

例 5.67(北京市 1988 年竞赛题)　求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的体积V和表面积S.

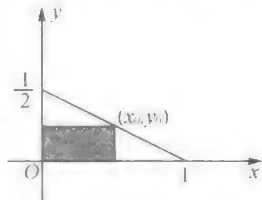
解析　由$z=x^2+y^2, z=2-\sqrt{x^2+y^2}$联立解得$z_1=1, z_2=4$(舍去)，所围部分在$xOy$平面上的投影区域$D$为$x^2+y^2\leqslant 1$，于是

$$V=\iint\limits_D[2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-\rho-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D[\sqrt{2}+\sqrt{1+4(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\sqrt{2}\pi+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\pi\left[\sqrt{2}+\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\right]\end{aligned}$$

例5.68（江苏省[illegible]年竞赛题）　有一形状为直角三角形的薄铜片，其质量面密度 $f(x,y)=k(1-x-2y)$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$1-x-2y\geqslant 0$，k 为正常数. 今从中截取一矩形铜片（该矩形两条邻边位于三角形的两条直角边上）使其质量最大，求该矩形铜片质量与原直角三角形铜片质量之比.

解析　如图，设矩形铜片与原点 O 相对的顶点为 (x_0,y_0)，则 $1-x_0-2y_0=0$. 三角形铜片 D 的质量为



$$
\begin{aligned}
M&=\iint\limits_{D}k(1-x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-k\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(2y+x-1)\mathrm{d}y\\
&=-\frac{k}{4}\int_0^1(2y+x-1)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{k}{4}\int_0^1(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{k}{12}
\end{aligned}
$$

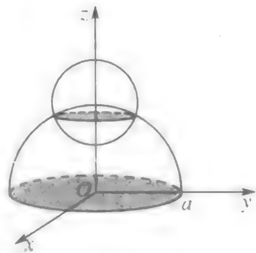
设矩形铜片为 D_1，则矩形铜片的质量为

$$
\begin{aligned}
m&=k\iint\limits_{D_1}(1-x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{y_0}(1-x-2y)\mathrm{d}y\\
&=k\int_0^{x_0}[y_0(1-x)-y_0^2]\mathrm{d}x=kx_0y_0\left(1-y_0-\frac{x_0}{2}\right)\\
&=\frac{k}{16}-k\left(y_0-\frac{1}{4}\right)^2
\end{aligned}
$$

当 $y_0=\frac{1}{4}$，$x_0=\frac{1}{2}$ 时 m 取最大值 $\frac{k}{16}$. 所以所求质量之比为 $\frac{k}{16}\div\frac{k}{12}=\frac{3}{4}$.

例5.69（江苏省2000年竞赛题）　已知两个球的半径分别是 a 和 $b(a>b)$，且小球球心在大球球面上，试求小球在大球内的那一部分的体积.

解析　**方法1**　用二重积分计算. 如图，设大球面的方程为



$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

小球面的方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=b^2$$

两球面的交线在 xy 平面上的投影所围的区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant\left(\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}\right)^2$，则所求立体的体积为$\left(记 k=\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}\right)$

$$V=\iint_D\left[\sqrt{a^2-x^2-y^2}-(a-\sqrt{b^2-x^2-y^2})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

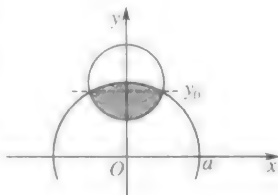
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^k(\sqrt{a^2-\rho^2}+\sqrt{b^2-\rho^2})\rho\mathrm{d}\rho-\iint_D a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(b^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^k-a\pi k^2$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left[a^3-(a^2-k^2)^{\frac{3}{2}}+b^3-(b^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\right]-a\pi k^2$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{3}{2}ab^2-\frac{3b^4}{4a}+b^3\right)-\pi\left(ab^2-\frac{b^4}{4a}\right)=\pi b^3\left(\frac{2}{3}-\frac{b}{4a}\right)$$

方法 2 用定积分计算. 如图,设大圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$,小圆的方程为 $x^2+(y-a)^2=b^2$. 两圆方程联立解得交点的纵坐标为 $y_0=a-\frac{b^2}{2a}$. 所求立体为两圆公共区域绕 y 轴旋转一周的旋转体,其体积为



$$V=\pi\int_{a-b}^{y_0}x_1^2\mathrm{d}y+\pi\int_{y_0}^{a}x_2^2\mathrm{d}y$$

这里 $x_1^2=b^2-(y-a)^2$,$x_2^2=a^2-y^2$. 于是

$$V=\pi\int_{a-b}^{y_0}[b^2-(y-a)^2]\mathrm{d}y+\pi\int_{y_0}^{a}(a^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\pi b^2(y_0-a+b)-\frac{\pi}{3}(y-a)^3\Big|_{a-b}^{y_0}+\pi a^2(a-y_0)-\frac{\pi}{3}y^3\Big|_{y_0}^{a}$$

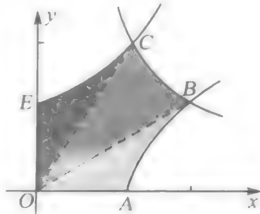
$$=\pi\Big[b^2y_0-ab^2+b^3-\frac{1}{3}(y_0^3-3y_0^2a+3y_0a^2-a^3)-\frac{1}{3}b^3$$

$$+a^3-a^2y_0-\frac{a^3}{3}+\frac{y_0^3}{3}\Big]$$

$$=\pi\left(a^3+\frac{2}{3}b^3-ab^2-\frac{4a^4-4a^2b^2+b^4}{4a}\right)=\pi b^3\left(\frac{2}{3}-\frac{b}{4a}\right)$$

例 5.70(江苏省 1991 年竞赛题) 求由曲面 $x^2+y^2=cz$,$x^2-y^2=\pm a^2$,$xy=\pm b^2$ 和 $z=0$ 围成区域的体积(其中 a,b,c 为正实数).

解析 题中 6 个曲面关于 yz 平面对称,关于 zx 平面也对称,yz 平面与 zx 平面将该区域分为 4 块等体积区域,将第一卦限的一块投影到 xy 平面上得区域 D. 其中区域 $OABO$ 记为 D_1,$\angle AOB=\alpha$;区域 $OBCO$ 记为 D_2,$\angle AOC$ 记为 β(如图所示). $\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CE}$ 的极坐标分别为



$$\rho_1^2=\frac{a^2}{\cos 2\theta},\quad \rho_2^2=\frac{2b^2}{\sin 2\theta},\quad \rho_3^2=\frac{-a^2}{\cos 2\theta}$$

因此立体区域的体积为

$$V=4\iint_D\frac{1}{c}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}\frac{1}{c}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{c}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho_1(\theta)}\rho^3\mathrm{d}\rho+\frac{4}{c}\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho_2(\theta)}\rho^3\mathrm{d}\rho+\frac{4}{c}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho_3(\theta)}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^{\alpha}\frac{a^4}{\cos^2 2\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{c}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{4b^4}{\sin^2 2\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{c}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4}{\cos^2 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^4}{2c}\tan 2\alpha-\frac{2b^4}{c}\cot 2\theta\Big|_{\alpha}^{\beta}+\frac{a^4}{2c}\tan 2\theta\Big|_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}$$

由于 $\rho_1(\alpha)=\rho_2(\alpha)$，$\rho_2(\beta)=\rho_3(\beta)$，所以 $\tan 2\alpha=\dfrac{2b^2}{a^2}$，$\tan 2\beta=-\dfrac{2b^2}{a^2}$，于是

$$V=\frac{a^2b^2}{c}-\frac{2b^4}{c}\left(-\frac{a^2}{2b^2}-\frac{a^2}{2b^2}\right)+\frac{a^4}{2c}\left(0+\frac{2b^2}{a^2}\right)=\frac{4}{c}a^2b^2$$

例 5.71（莫斯科食品工业学院 1977 年竞赛题） 将地球看作为半径为 R 的球体，假设大气层的质量分布密度服从规律 $p(h)=Re^{-kh}$，这里 h 为质点距离地球表面的高度，k 为正常数，试求地球大气层的质量.

解析 以地球中心为坐标原点建立空间直角坐标系，采用球坐标计算，大气层的质量为

$$m=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_R^{+\infty}Re^{-k(r-R)}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\cdot 2\cdot\int_R^{+\infty}Rr^2e^{-k(r-R)}\mathrm{d}r$$

$$=4\pi R\left(-\frac{1}{k}\right)\left[r^2e^{-k(r-R)}\Big|_R^{+\infty}-2\int_R^{+\infty}re^{-k(r-R)}\mathrm{d}r\right]$$

$$=\frac{4}{k}\pi R^3-\frac{8\pi R}{k^2}\left[re^{-k(r-R)}\Big|_R^{+\infty}-\int_R^{+\infty}e^{-k(r-R)}\mathrm{d}r\right]$$

$$=\frac{4}{k}\pi R^3+\frac{8\pi R^2}{k^2}+\frac{8\pi R}{k^3}=\frac{4}{k}\pi R\left(R^2+\frac{2R}{k}+\frac{2}{k^2}\right)$$

例 5.72（南京工业大学 2009 年竞赛题） 试求曲线 $\begin{cases}z=y\cot x,\\x=y^2+z^2\end{cases}$ 上的点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4},\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}\right)$ 到 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2},0\right)$ 间一段的弧长.

解析 设 $\begin{cases}z=y\cot x,\\x=y^2+z^2\end{cases}$ 的参数方程为

$$x=t,\quad y=\sqrt{t}\sin t,\quad z=\sqrt{t}\cos t\quad\left(\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

则

$$l=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1^2+\left(\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\cos t\right)^2+\left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\sin t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\left(\sqrt{t}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\sqrt{2}-1+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{6}\right)\pi\right]$$

例 5.73(江苏省 2002 年竞赛题) 设曲线$\overset{\frown}{AB}$的方程为 $x^2+y^2-4y+3=0(x\geqslant 0)$,一质点 P 在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿曲线$\overset{\frown}{AB}$ 从点 $A(0,1)$ 运动到点 $B(0,3)$,力 $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 到定点 $M(2,0)$ 的距离,其方向垂直于线段 MP,且与 y 轴正向的夹角为锐角,求力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.

解析 根据题意,得$\overrightarrow{MP}=(x-2,y)$,$\boldsymbol{F}=(y,2-x)$,功

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}y\mathrm{d}x+(2-x)\mathrm{d}y=\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}y\mathrm{d}x+(2-x)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}y\mathrm{d}x+(2-x)\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^3 2\mathrm{d}y=-2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2+4=4-\pi$$

其中 D 为$\overset{\frown}{AB}$ 与 y 轴所围区域.

例 5.74(江苏省 2002 年竞赛题) 已知曲线$\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为 $\rho=1+\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,一质点 P 在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿曲线$\overset{\frown}{AB}$ 从点 $A(0,-1)$ 运动到点 $B(0,1)$,力 $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 到定点 $M(3,4)$ 的距离,其方向垂直于线段 MP,且与 y 轴正向的夹角为锐角,求力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.

解析 根据题意,得$\overrightarrow{MP}=(x-3,y-4)$,$\boldsymbol{F}=(y-4,3-x)$,功

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}(y-4)\mathrm{d}x+(3-x)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}(y-4)\mathrm{d}x+(3-x)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}(y-4)\mathrm{d}x+(3-x)\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}3\mathrm{d}y=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\mathrm{d}\theta+6=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+6$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta+6=2-\frac{3}{2}\pi$$

其中 D 为$\overset{\frown}{AB}$ 与 y 轴所围区域.

例 5.75(莫斯科技术物理学院 1976 年竞赛题) 在区域 $\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 上,函数 $f(x,y,z)$ 与 $g(x,y,z)$ 具有二阶连续的偏导数,Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,求单位时间内向量 $\mathbf{grad}f\times\mathbf{grad}g$ 通过Σ 的流量.

解析
$$\mathbf{grad}f\times\mathbf{grad}g=(f'_x,f'_y,f'_z)\times(g'_x,g'_y,g'_z)$$
$$=(f'_yg'_z-f'_zg'_y,f'_zg'_x-f'_xg'_z,f'_xg'_y-f'_yg'_x)$$

记 $P=f'_yg'_z-f'_zg'_y$,$Q=f'_zg'_x-f'_xg'_z$,$R=f'_xg'_y-f'_yg'_x$,Ω:$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,应用高

斯公式,有

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint_{\Omega} (P'_x + Q'_y + R'_z)\mathrm{d}V \\
&= \iiint_{\Omega} (f''_{yx}g'_z + f'_y g''_{zx} - f''_{zx}g'_y - f'_z g''_{yx} + f''_{zy}g'_x + f'_z g''_{xy} - f''_{xy}g'_z - f'_x g''_{zy} + f''_{xz}g'_y \\
&\quad + f'_x g''_{yz} - f''_{yz}g'_x - f'_y g''_{xz})\mathrm{d}V \\
&= \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}V = 0
\end{aligned}$$

例5.76(陕西省1999年竞赛题)　给定面密度为1的平面薄板 D: $x^2 \leqslant y \leqslant 1$,求该薄板关于过 D 的重心和点(1,1)的直线的转动惯量.

解析　令重心的坐标为$(\bar{x},\bar{y})$,由于 D 关于 $x=0$ 对称,可知 $\bar{x}=0$,且

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mathrm{d}\sigma} = \frac{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} y\mathrm{d}y}{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y} = \frac{3}{5}$$

于是 D 的重心为$\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$.

过重心与点(1,1)的直线 L 的方程为 $2x-5y+3=0$. 由于 D 上任一点(x,y)到直线 L 的距离为 $d=\dfrac{|2x-5y+3|}{\sqrt{29}}$,故所求转动惯量为

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{29}\iint_D (2x-5y+3)^2\mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{29}\iint_D (4x^2+25y^2+9-20xy+12x-30y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

应用奇偶函数的积分性质可知

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y = \frac{4}{15},\quad \iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{7}$$

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma = \frac{4}{3},\quad \iint_D y\mathrm{d}\sigma = \frac{4}{5},\quad \iint_D xy\mathrm{d}\sigma = \iint_D x\mathrm{d}\sigma = 0$$

因此,所求转动惯量为$\dfrac{352}{3045}$.

练 习 题 五

1. 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 f(x,y)dy$;　　(2) $\int_0^1 dx \int_{2x-1}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

(3) $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2+2x}^{x+2} f(x,y)dy$;　　(4) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$;

(5) $\int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a} f(x,y)dx \ (a>0)$;　　(6) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{2\cos x} f(x,y)dy$;

(7) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

2. 将$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 化为直角坐标下的两种次序二次积分.

3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D |y-x^2| \max\{x,y\} dxdy, D: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$;

(2) $\iint\limits_D |x^2+y^2-2| dxdy, D: x^2+y^2 \leqslant 3$;

(3) $\iint\limits_D |x^2+y^2-1| dxdy,\ D: 0 \leqslant y \leqslant 1+x, -1 \leqslant x \leqslant 1$;

(4) $\iint\limits_D |x^2+y^2-x| dxdy,\ D:\ 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant x \leqslant 1$;

(5) $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy, D: x^2+y^2 \leqslant 2ay, x^2+y^2 \geqslant ay (a>0)$;

(6) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$, D 为 $y^2=x, x=0, y=1$ 所围区域;

(7) $\iint\limits_D y dxdy, D: x^2+y^2 \leqslant 4a^2, \rho \geqslant a(1+\cos\theta), y \geqslant 0 (a>0)$;

(8) $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$, D 为 $x+y=1, x+y=3, x-y=1, x-y=-1$ 所围区域;

(9) $\iint\limits_D (x+y^2) e^{-(x^2+y^2-4)} dxdy, D: 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$;

(10) $\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}} dxdy$, D 为$\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=1, x=0, y=0$ 所围区域;

(11) $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy, D: (x^2+y^2)^2 \leqslant 2(x^2-y^2)$.

4. 计算：$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} \dfrac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y$.

5. 计算：$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_1^{x^2} x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

6. 设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0,\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7. 求$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$.

8. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 2z, 1\leqslant z\leqslant 2$；

(2) $\iiint\limits_\Omega \exp(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega: x^2+y^2\leqslant z, z\leqslant 1$；

(3) $\iiint\limits_\Omega [(1+x)^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant z$；

(4) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega: z^2\leqslant x^2+y^2\leqslant z$；

(5) $\iiint\limits_\Omega x\exp\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$；

(6) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\Omega: \pi^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\pi^2$.

9. 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，并且是周期为 1 的周期函数，又$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$，如果 $F(x)=\int_0^x \mathrm{d}v\int_0^v \mathrm{d}u\int_u^v f(t)\mathrm{d}t$，试将 $F(x)$ 表示为定积分形式，并求 $F'(1)$.

10. 求$\iiint\limits_\Omega (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，这里 Ω 是由 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的曲面与平面 $z=2,z=8$ 所围成的区域.

11. 求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积.

12. 求圆柱面 $x^2+y^2=ay(a>0)$ 介于 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 xy 平面之间部分曲面的面积.

13. 计算下列曲线积分：

(1) $\int_{\overset{\frown}{AO}}(1+\mathrm{e}^x)\cos y\mathrm{d}x-[(x+\mathrm{e}^x)\sin y-x]\mathrm{d}y$，其中$\overset{\frown}{AO}$ 为由点 $A(2,0)$ 至点

$O(0,0)$ 的心形线 $\rho = 1 + \cos\theta$ 的上半周.

(2) $\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + (x+y+z)\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为由弧 $\overset{\frown}{AmB}$ 与直线 BA 组成，$\overset{\frown}{AmB}$ 为螺纹线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{c}{2\pi}t\,(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一段，BA 平行于 z 轴，但指向相反.

(3) $\int_{\Gamma} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为 $\begin{cases} 2x + z = 0, \\ x = \sqrt{1-y^2} \end{cases}$ 上从点 $(0,1,0)$ 到点 $(0,-1,0)$.

14. 求 $\int_{\overset{\frown}{AB}} (1+2xe^y)\mathrm{d}x + (x+x^2e^y)\mathrm{d}y$，$\overset{\frown}{AB}$ 为连接点 $A(1,2)$，$B(3,4)$ 的曲线弧，且 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 构成封闭曲线的正向，它所围的图形的面积为 S.

15. 求 $\int_{\overset{\frown}{AB}} [\varphi(y)\cos x - \pi y]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\sin x - \pi]\mathrm{d}y$，$\overset{\frown}{AB}$ 为连接点 $A(\pi,2)$，$B(3\pi,4)$ 的曲线，且 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 构成封闭曲线的正向，它所围的图形的面积为 2.

16. 求 $\int_{\Gamma} (y\sin x + \cos y)\mathrm{d}x + (xy^3 - x\sin y + 8y^7)\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 为曲线 $y = \cos x$ 与 $y = -\cos x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 所围区域的边界曲线的正向.

17. 确定 n 的值，使得曲线积分 $\int_A^B (x^4 + 4xy^n)\mathrm{d}x + (6x^{n-1}y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$ 与路线无关，并求出当点 A,B 的坐标为 $A(0,0)$，$B(1,2)$ 时该曲线积分的值.

18. 设 $I = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$，其中 $P = xz + ay^2 + bz^2$，$Q = xy + az^2 + bx^2$，$R = yz + ax^2 + by^2$，试求 a,b 使曲线积分与路线无关，并求出当 A,B 的坐标为 $A(0,0,z_0)$，$B(x_1,y_1,0)$ 时 I 的值.

19. 求 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\mathrm{d}S$，$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2 = 1\,(0 < a < 1)$.

20. 求 $\iint_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$，$z=2$ 所截的一段曲面的外侧.

21. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2 = 2z$，试求曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^4+y^4+z^4-x^3-y^3-z^3)\mathrm{d}S$$

22. 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2\,(a>0)$ 上，问当 R 为何值时，球面 Σ 在定球内部的面积最大?

专题 6　空间解析几何

6.1　基本概念与内容提要

6.1.1　向量的基本概念与向量的运算

1）向量在几何上为有向线段. 若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$，将 $\overrightarrow{PQ}$ 平行移动使其起点 P 与原点 O 重合，若终点 Q 移至点 M 处，则 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OM}$，若点 M 的坐标为 $M(a_1,a_2,a_3)$，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=(a_1,a_2,a_3)$（或 $\{a_1,a_2,a_3\}$），此式称为向量的坐标表示式. 称

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1)$$

为基向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

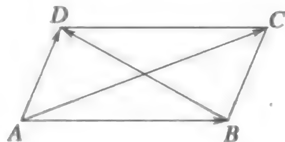
向量 $\boldsymbol{a}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量.

2）向量的运算

（1）向量的加法与减法满足平行四边形法则. 在下图中，有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$$

（2）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积定义为



$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

它的射影表示式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$$

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的坐标计算公式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

（3）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积定义为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{c}^{\circ}$$

这里 $\boldsymbol{c}^{\circ}$ 是同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\circ}$ 组成右手系.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标计算公式为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

6.1.2 空间的平面

1）平面的点法式方程：通过点 (x_0,y_0,z_0)，法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2）平面的一般式方程：平面的一般式方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

这里 A,B,C 不全为 0. 当 $D=0$ 时，该平面过原点；当 A,B,C 中有一个为 0 时，该平面垂直于某坐标平面；当 A,B,C 中有两个为 0 时，该平面垂直于某坐标轴；xy 平面，yz 平面，zx 平面的方程分别为 $z=0$，$x=0$，$y=0$.

3）平面的截距式方程：在 x 轴，y 轴，z 轴上的截距分别为 $a,b,c(abc\neq 0)$ 的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

4）点到平面的距离公式：点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

6.1.3 空间的直线

1）直线的点向式方程：通过点 (x_0,y_0,z_0)，方向向量为 $\boldsymbol{l}=(m,n,p)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

2）直线的一般式方程：直线的一般式方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

这里的直线表示为两个平面的交线.

3）直线的参数式方程：通过点(x_0,y_0,z_0)，方向向量为$\boldsymbol{l}=(m,n,p)$的直线的参数方程为

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt$$

这里t为参数.

4）点到直线的距离：设直线L通过点P，方向向量为$\boldsymbol{l}$，则点M到直线L的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{PM}\times\boldsymbol{l}|}{|\boldsymbol{l}|}$$

5）公垂线的长：设直线L_1过点P_1，方向向量为$\boldsymbol{l}$，直线L_2过P_2，方向向量为$\boldsymbol{l}_2$，则直线L_1与L_2的公垂线的长为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2)|}{|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2|}$$

6.1.4　空间的曲面

1）空间曲面的一般方程为$F(x,y,z)=0$，或写为$z=f(x,y)$.

2）球面：球面方程的一般形式为

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$$

球面的标准方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

这里(a,b,c)为球心，R为半径.

3）柱面：方程$F(x,y)=0$表示母线平行于z轴的柱面，准线为$\begin{cases}F(x,y)=0,\\z=0;\end{cases}$方程$F(y,z)=0$表示母线平行于$x$轴的柱面，准线为$\begin{cases}F(y,z)=0,\\x=0;\end{cases}$方程$F(z,x)=0$表示母线平行于$y$轴的柱面，准线为$\begin{cases}F(z,x)=0,\\y=0.\end{cases}$

4）旋转曲面：xy平面上的曲线$y=f(x^2)$绕y轴旋转一周的旋转曲面方程为$y=f(x^2+z^2)$；xy平面上的曲线$x=g(y^2)$绕x轴旋转一周的旋转曲面方程为$x=g(y^2+z^2)$. 其他坐标平面内的曲线绕某坐标轴旋转所得旋转曲面的方程类似可得.

5）二次曲面的标准方程

（1）椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；　（2）单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

（3）双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；　（4）二次锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$；

(5) 椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$；　　(6) 双曲抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

6) 空间曲面的切平面与法线

已知空间曲面Σ：$F(x,y,z)=0$，若函数F可微，点$P(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则

$$n=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_P$$

为曲面Σ在点P的法向量；曲面Σ在点P的切平面方程为

$$F'_x(P)(x-x_0)+F'_y(P)(y-y_0)+F'_z(P)(z-z_0)=0$$

曲面Σ在点P的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P)}$$

6.1.5　空间的曲线

1) 空间曲线的一般式方程为

$$\Gamma:\ \begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ H(x,y,z)=0\end{cases}$$

这里曲线表示为两个曲面的交线.

2) 空间曲线的参数式方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)$$

这里t为参数.

3) 空间曲线在坐标平面内的投影

4) 空间曲线的切线与法平面

设有空间曲线Γ(一般式方程如上)，这里F,H可微，点$M(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，则

$$l=(F'_x,F'_y,F'_z)\times(H'_x,H'_y,H'_z)\Big|_M$$

为曲线Γ在点M的切向量. 记$l=(m,n,p)$，则曲线Γ在点M的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

曲线Γ在点M的法平面方程为

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$$

设空间曲线Γ的参数方程为$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$，则$t=t_0$时曲线$\Gamma$的切线方程为

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}=\frac{z-\omega(t_0)}{\omega'(t_0)}$$

曲线 Γ 在 $t=t_0$ 时的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-\varphi(t_0))+\psi'(t_0)(y-\psi(t_0))+\omega'(t_0)(z-\omega(t_0))=0$$

6.2　竞赛题与精选题解析

6.2.1　向量的运算(例 6.1—6.5)

例 6.1(江苏省 1994 年竞赛题)　设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是非零常向量，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=$________.

解析　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2|\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{a}|x}$

$$=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}+0=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

例 6.2(江苏省 1991 年竞赛题)　已知 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

解析　$\boldsymbol{a}$ 为单位向量，故 $|\boldsymbol{a}|=1$. 因两向量垂直的充要条件是它们的数量积为 0，所以

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0\end{cases}$$

即

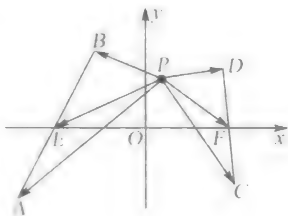
$$\begin{cases}16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=-7,\\30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-8|\boldsymbol{b}|^2=7\end{cases}$$

由此可解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，$|\boldsymbol{b}|^2=1$. 于是

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

例 6.3(江苏省 2006 年竞赛题)　已知 A,B,C,D 为空间的 4 个定点，AB 与 CD 的中点分别为 E,F，$|EF|=a$(a 为正常数)，P 为空间的任一点，则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$ 的最小值为________.

解析　如图，在点 E,F,P 所在平面上建立直角坐标系，并令 EF 的中点为坐标原点，$\overrightarrow{EF}$ 方向为 x 轴，则 E,F 的坐标为 $E\left(-\frac{a}{2},0\right)$，$F\left(\frac{a}{2},0\right)$. 设 P 的坐标为 (x,y)，因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PE}$，$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PF}$，又 $\overrightarrow{PE}=\left(-\frac{a}{2}-x,-y\right)$，$\overrightarrow{PF}=\left(\frac{a}{2}-x,-y\right)$，所以



$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})=4\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=4\left[\left(-\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)+y^2\right]$$
$$=4(x^2+y^2)-a^2$$

由此可得:当 $x=y=0$ 时,原式取最小值 $-a^2$.

例 6.4(江苏省 1996 年竞赛题)　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为单位向量,其夹角为 $\frac{\pi}{6}$,则以 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$ 与 $3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积为______.

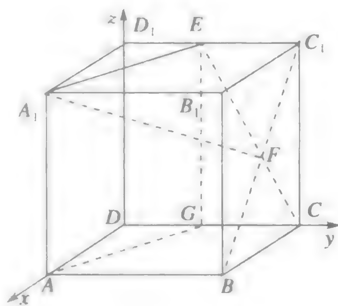
解析　平行四边形的面积

$$\begin{aligned}S&=|(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})\times(3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})|=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+6\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}|\\&=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}-6\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|-5\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|\\&=5|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=5|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\sin\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

例 6.5(江苏省 2010 年竞赛题)　已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 2,E 为 D_1C_1 的中点,F 为侧面正方形 BCC_1B_1 的中心.

(1) 试求过点 A_1,E,F 的平面与底面 $ABCD$ 所成的二面角的值;

(2) 试求过点 A_1,E,F 的平面截正方体所得到的截面的面积.



解析　(1) 建立如图所示坐标系,则 $A_1(2,0,2)$,$E(0,1,2)$,$F(1,2,1)$,$\overrightarrow{A_1F}=(-1,2,-1)$,$\overrightarrow{EF}=(1,1,-1)$,$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{A_1F}=(1,2,3)$,底面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,故所求的二面角 θ 为

$$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{n}|}=\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

(2) 设 CD 的中点为 G,则四边形 $ABCG$ 的面积为 $S_1=3$,则所求截面的面积为 $S=\dfrac{S_1}{\cos\theta}=\sqrt{14}$.

6.2.2　空间平面的方程(例 6.6—6.7)

例 6.6(江苏省 1994 年竞赛题)　曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\Ax+By+Cz=0\end{cases}$ $(C\neq 0)$ 所围平面区域 D 的面积为______.

解析　因平面 $Ax+By+Cz=0$ 的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{A}{u},\quad\cos\beta=\frac{B}{u},\quad\cos\nu=\frac{C}{u}$$

这里 $u=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$，平面区域 D 在 xy 平面上的投影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，其面积为 πab，所以 D 的面积为

$$\pi ab\frac{1}{|\cos\nu|}=\frac{1}{|C|}\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

例 6.7（浙江省 2006 年竞赛题）　求过点 $(1,2,3)$ 且与曲面 $z=x+(y-z)^3$ 的所有切平面皆垂直的平面方程.

解析　令 $F=z-x-(y-z)^3=0$，则曲面上过一点 (x,y,z) 的切平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(-1,-3(y-z)^2,1+3(y-z)^2)$$

记 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$，由于 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=-1-3(y-z)^2+1+3(y-z)^2\equiv 0$，所以 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}$，因此所求平面方程为

$$(x-1)+(y-2)+(z-3)=0,\quad 即\quad x+y+z-6=0$$

6.2.3　空间直线的方程(例 6.8—6.12)

例 6.8（江苏省 2016 年竞赛题）　已知点 $P(3,2,1)$ 与平面 Π：$2x-2y+3z=1$，试在直线 $\begin{cases}x+2y+z=1,\\x-y+2z=4\end{cases}$ 上求一点 Q，使得线段 PQ 平行于平面 Π.

解析　通过点 $P(3,2,1)$ 且与平面 $2x-2y+3z=1$ 平行的平面为

$$\Pi':2x-2y+3z=5$$

题给直线通过点 $A(3,-1,0)$，方向为 $\boldsymbol{l}=(1,2,1)\times(1,-1,2)=(5,-1,-3)$，设点 Q 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，其中 $x_0=3+5t$，$y_0=-1-t$，$z_0=0-3t$，代入平面 Π' 的方程得

$$2(3+5t)-2(-1-t)+3(-3t)=5\Rightarrow t=-1$$

于是点 Q 的坐标为 $(-2,0,3)$.

例 6.9（全国大学生 2010 年预赛题）　求下列两条直线

$$l_1:\begin{cases}x-y=0,\\z=0\end{cases}\quad 和\quad l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

之间的距离.

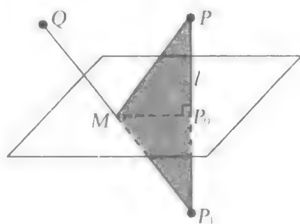
解析　直线 l_1 过点 $O(0,0,0)$，$A(1,1,0)$，其方向向量为 $\boldsymbol{l}_1=\overrightarrow{OA}=(1,1,0)$；直线 l_2 过点 $P(2,1,3)$，其方向向量为 $\boldsymbol{l}_2=(4,-2,-1)$. 这两条直线的公垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{l}=(4,-2,-1)\times(1,1,0)=(1,-1,6)$$

于是两条直线的距离为

$$d=|\mathrm{Prj}_{l}\overrightarrow{OP}|=\left|\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}\right|=\left|\frac{(2,1,3)\cdot(1,-1,6)}{\sqrt{1+1+36}}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{38}$$

例 6.10（江苏省 2004 年竞赛题）　已知点 $P(1,0,-1)$ 与 $Q(3,1,2)$，试在平面 $x-2y+z=12$ 上求一点 M，使得 $|PM|+|MQ|$ 最小.



解析　显然，点 P,Q 在已知平面的同侧. 从 P 作直线 l 垂直于平面，l 的方程为

$$x=1+t,\quad y=-2t,\quad z=-1+t$$

代入平面方程解得 $t=2$，所以直线 l 与平面的交点为 $P_0(3,-4,1)$（如图所示），而 P 关于平面的对称点为 $P_1(5,-8,3)$. 连接 P_1Q，其方程为

$$x=3+2t,\quad y=1-9t,\quad z=2+t$$

代入平面方程解得 $t=\frac{3}{7}$. 于是所求点 M 的坐标为 $M\left(\frac{27}{7},-\frac{20}{7},\frac{17}{7}\right)$.

例 6.11（江苏省 2008 年竞赛题）　在平面 $\Pi: x+2y-z=20$ 内作一直线 Γ，使直线 Γ 过另一直线 $L:\begin{cases}x-2y+2z=1,\\3x+y-4z=3\end{cases}$ 与平面 Π 的交点，且 Γ 与 L 垂直，求直线 Γ 的参数方程.

解析　直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=(1,-2,2)\times(3,1,-4)=(6,10,7)$，且直线 L 上有一点 $(1,0,0)$，所以直线 L 的参数方程为 $x=1+6t, y=10t, z=7t$，代入平面方程解得 $t=1$，所以直线 L 与平面 Π 的交点为 $(7,10,7)$. 平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$，所求的直线 Γ 的方向向量为 $\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}=(6,10,7)\times(1,2,-1)=-(24,-13,-2)$，于是所求直线 Γ 的参数方程为

$$x=7+24t,\quad y=10-13t,\quad z=7-2t$$

例 6.12（江苏省 1996 年竞赛题）　设直线 $\begin{cases}x+2y-3z=2,\\2x-y+z=3\end{cases}$ 在平面 $z=1$ 上的投影为直线 L，则点 $(1,2,1)$ 到直线 L 的距离等于________.

解析　取平面束

$$x+2y-3z-2+\lambda(2x-y+z-3)=0$$

其法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1+2\lambda,2-\lambda,-3+\lambda)$，平面 $z=1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，因 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\lambda-3=0$，得 $\lambda=3$. 故投影平面的方程为 $7x-y-11=0$. 因而投影直线 L 的方程为 $\begin{cases}7x-y-11=0,\\z=1,\end{cases}$ 其方向向量为 $\boldsymbol{l}=(7,-1,0)\times(0,0,1)=-(1,7,0)$. 又 L 通过点 $P_1(1,-4,1)$，于是点 $P_0(1,2,1)$ 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\times\boldsymbol{l}|}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{|(0,6,0)\times(1,7,0)|}{|(1,7,0)|}$$
$$=\frac{|(0,0,-6)|}{\sqrt{50}}=\frac{3}{25}\sqrt{50}$$

6.2.4　空间曲面的方程与空间曲面的切平面(例 6.13—6.24)

例 6.13(江苏省 2006 年竞赛题)　已知空间三点 $A(-4,0,0)$,$B(0,-2,0)$,$C(0,0,2)$,O 为原点,则四面体 $OABC$ 的外接球面的方程为____________.

解析　设四面体的外接球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$$

将点 A,B,C 的坐标代入得到

$$16-4a=0,\quad 4-2b=0,\quad 4+2c=0$$

所以 $a=4$,$b=2$,$c=-2$,于是所求球面方程为

$$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$$

例 6.14(南京大学 1993 年竞赛题)　曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 的垂直于平面 $x+4y+3z=0$ 的法线方程为____________.

解析　平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,4,3)$.令 $F=x^2+2y^2+3z^2-12$,则曲面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,4y,6z)$,令

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{3}=t$$

得 $x=\dfrac{t}{2}$,$y=t$,$z=\dfrac{t}{2}$,代入曲面方程得 $t=\pm 2$.由此得两个切平面的切点坐标为 $(1,2,1)$ 与 $(-1,-2,-1)$.于是两条法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{3}\quad 与\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{3}$$

例 6.15(北京市 1997 年竞赛题)　证明曲面

$$z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f\left(\frac{y}{x}\right)$$

上任意点处的切平面在 Oz 轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数,并求出此常数.

解析　记 $F=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x^3f\left(\dfrac{y}{x}\right)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=(F'_x,F'_y,F'_z)\\&=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-3x^2f\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right),\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-x^2f'\left(\frac{y}{x}\right),\right.\\&\qquad\left.1+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\end{aligned}$$

曲面上任一点 (x,y,z) 处的切平面方程为

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-3x^2f\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\right)(X-x)$$

$$+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-x^2f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)(Y-y)+\left(1+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(Z-z)=0$$

令 $X=Y=0$，得该切平面在 Oz 轴上的截距为

$$d=-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(3x^2f\left(\frac{y}{x}\right)-z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}$$

$$=-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

于是截距与切点到原点的距离之比为 $\dfrac{d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-2$.

例 6.16(南京大学 1995 年竞赛题) 从椭球面外的一点作椭球面的一切可能的切平面，证明全部切点在同一平面上.

解析 设椭球面 Σ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，椭球面外一点设为 $P(x_0,y_0,z_0)$，$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}>1$(如图所示). 由 P 向 Σ 作切平面，设切点为 $Q(x,y,z)$，因曲面 Σ 过点 Q 的切平面方程为

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1$$

令 $(X,Y,Z)=(x_0,y_0,z_0)$，代入上式得

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1 \qquad (*)$$

这表明切点 Q 位于同一平面$(*)$上.

例 6.17(江苏省 2016 年竞赛题) 设函数 $f(x,y)$ 在点$(2,-2)$处可微，满足

$$f(\sin(xy)+2\cos x,xy-2\cos y)=1+x^2+y^2+o(x^2+y^2)$$

这里 $o(x^2+y^2)$ 表示比 x^2+y^2 高阶的无穷小(当$(x,y)\to(0,0)$时)，试求曲面 $z=f(x,y)$ 在点$(2,-2,f(2,-2))$处的切平面方程.

解析 因 $f(x,y)$ 在点$(2,-2)$处可微，故 $f(x,y)$ 在点$(2,-2)$处连续，又因

$$\varphi(x,y)=\sin(xy)+2\cos x,\quad \psi(x,y)=xy-2\cos y$$

在点$(0,0)$处连续，在原式中令$(x,y)\to(0,0)$得 $f(2,-2)=1$. 因 $f(x,y)$ 在点$(2,-2)$处可微，所以 $f(x,y)$ 在点$(2,-2)$处可偏导. 因此，在原式中令 $y=0$ 得 $f(2\cos x,-2)=1+x^2+o(x^2)$，应用偏导数的定义得

$$f'_x(2,-2)=\lim_{x\to 0}\frac{f(2+(2\cos x-2),-2)-f(2,-2)}{2\cos x-2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(2\cos x,-2)-1}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{-x^2}=-1$$

在原式中令 $x=0$ 得 $f(2,-2\cos y)=1+y^2+o(y^2)$,应用偏导数的定义得

$$f'_y(2,-2)=\lim_{y\to 0}\frac{f(2,-2+(-2\cos y+2))-f(2,-2)}{-2\cos y+2}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(2,-2\cos y)-1}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2+o(y^2)}{y^2}=1$$

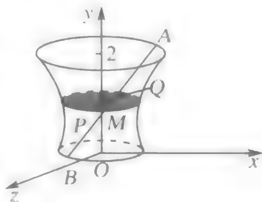
因此曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(2,-2,1)$ 处的切平面方程为

$$-f'_x(2,-2)\cdot(x-2)-f'_y(2,-2)\cdot(y+2)+1\cdot(z-1)=0$$

化简得 $x-y+z=5$.

例 6.18(江苏省 2002 年竞赛题)　求直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面的方程,并求该曲面与 $y=0$, $y=2$ 所包围的立体的体积.

解析　如右图所示,在所求曲面上任取点 $P(x,y,z)$,过 P 点作垂直于 y 轴的平面,该平面与题给直线 AB 交于点 $M(x_0,y_0,z_0)$,与 y 轴交于点 $Q(0,y,0)$,则 $y_0=y$,且 $|PQ|=|MQ|$,所以 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$.



因为

$$\frac{x_0-1}{2}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0}{-1}$$

所以 $x_0=1+2y$, $z_0=-y$,由此可得旋转曲面方程为

$$x^2+z^2=1+4y+5y^2$$

所求立体体积为

$$V=\pi\int_0^2(x^2+z^2)\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(1+4y+5y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\pi\left(y+2y^2+\frac{5}{3}y^3\right)\Big|_0^2=\frac{70}{3}\pi$$

例 6.19(江苏省 2002 年竞赛题)　设 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z=0,\\2x+y-2z=k.\end{cases}$

(1) 当 k 为何值时 Γ 为一圆?

(2) 当 $k=6$ 时,求 Γ 的圆心和半径.

解析　(1) 球面方程化为

$$(x+2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$$

所以球面的球心为$(-2,2,-1)$，半径为3. 球心到平面$2x+y-2z=k$的距离为

$$d=\frac{|-4+2+2-k|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{1}{3}|k|$$

由$\frac{1}{3}|k|<3$，解得k的取值范围是$(-9,9)$.

(2) $k=6$时，上述$d=2$，所以圆Γ的半径$r=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. 过球心与已知平面$2x+y-2z=6$垂直的直线为

$$x=-2+2t,\quad y=2+t,\quad z=-1-2t$$

代入平面方程解得$t=\frac{2}{3}$，故所求圆的圆心为$\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3},-\frac{7}{3}\right)$，半径$r=\sqrt{5}$.

例 6.20(全国大学生 2015 年预赛题)　设M是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程.

解析　圆锥面M的顶点为$O(0,0,0)$，其准线选作过三点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$的圆

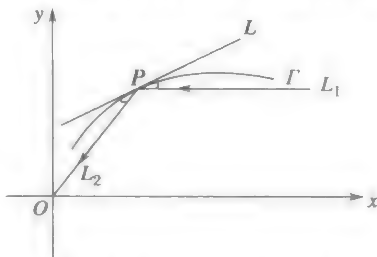
$$\Gamma:\begin{cases}x+y+z=1,\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

设$P(x,y,z)$是圆锥面M上的任一点，射线OP与准线Γ的交点记为$Q(x_1,y_1,z_1)$，则

$$\begin{cases}x_1+y_1+z_1=1,\\x_1^2+y_1^2+z_1^2=1\end{cases}\tag{*}$$

由于$\frac{x_1-0}{x-0}=\frac{y_1-0}{y-0}=\frac{z_1-0}{z-0}=t$，代入(*)式得$\begin{cases}xt+yt+zt=1,\\(xt)^2+(yt)^2+(zt)^2=1,\end{cases}$消去$t$即得所求圆锥面$M$的方程为$xy+yz+zx=0$

例 6.21(北京市 1999 年竞赛题)　表面为旋转曲面的镜子应具有怎样的形状才能使它将所有平行于其轴的光线反射到一点？求出旋转曲面的方程.



解析　如图，设旋转曲面的旋转轴为x轴，旋转曲面与xy平面的截线为Γ，设Γ的方程为$y=y(x)$，入射光线L_1平行于x轴，反射光线L_2经过定点$O(0,0)$.

Γ在点$P(x,y(x))$的切线为L，则L的方向向量为$\boldsymbol{l}=(-1,-y'(x))$，$L_1$的方向向量为$\boldsymbol{l}_1=(-1,0)$，$L_2$的方向向量为$\boldsymbol{l}_2=(-x,-y(x))$. L与L_1的夹角

$$\theta_1 = \arccos \frac{\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}| \cdot |\boldsymbol{l}_1|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

L 与 L_2 的夹角

$$\theta_2 = \arccos \frac{\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}| \cdot |\boldsymbol{l}_2|} = \arccos \frac{x + yy'}{\sqrt{1+(y')^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}$$

由于 $\theta_1 = \theta_2$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{x + yy'}{\sqrt{1+(y')^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}$$

化简得 $y(x)$ 满足微分方程

$$yy' = -x + \sqrt{x^2+y^2} \quad (x \geqslant 0)$$

令 $y = xu$，方程化为

$$\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2} - (1+u^2)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

令 $1 + u^2 = v^2 (v > 0)$，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{1-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

解得 $(v-1)x = C$，即 $y^2 = 2Cx + C^2$，于是旋转曲面的方程为

$$y^2 + z^2 = 2Cx + C^2$$

例 6.22（北京市 2001 年竞赛题）　若可微函数 $f(x,y)$ 对任意的 x,y,t 满足 $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$，$P_0(1,-2,2)$ 是曲面 $z = f(x,y)$ 上的一点，且 $f'_x(1,-2) = 4$，求曲面在 P_0 处的切平面方程.

解析　由 $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$，两边对 t 求偏导有

$$f'_x(tx,ty)x + f'_y(tx,ty)y = 2tf(x,y)$$

取 $t = 1, x = 1, y = -2$，得

$$f'_x(1,-2) + f'_y(1,-2)(-2) = 2f(1,-2)$$

将 $f(1,-2) = 2$，$f'_x(1,-2) = 4$ 代入上式，得 $f'_y(1,-2) = 0$，故曲面在 P_0 处的法向量为 $\boldsymbol{n} = (f'_x(P_0), f'_y(P_0), -1) = (4,0,-1)$，于是所求切平面的方程为

$$4(x-1) - (z-2) = 0, \quad 即 \quad 4x - z - 2 = 0$$

例 6.23（江苏省 2008 年竞赛题）　(1) 证明曲面 Σ：

$$x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta, \quad z = (b + a\cos\theta)\sin\varphi$$
$$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; 0 < a < b)$$

为旋转曲面；

(2) 求旋转曲面Σ所围立体的体积.

解析 (1) 消去θ、φ，得

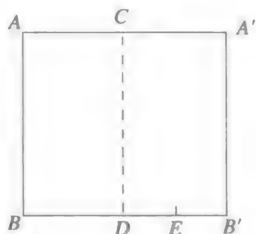
$$(\sqrt{x^2+z^2}-b)^2+y^2=a^2$$

它是曲线Γ：$\begin{cases}(x-b)^2+y^2=a^2,\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周生成的旋转曲面.

(2) $V=2\pi\int_0^a[(b+\sqrt{a^2-y^2})^2-(b-\sqrt{a^2-y^2})^2]\mathrm{d}y=8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y$

$\quad=2\pi^2a^2b$

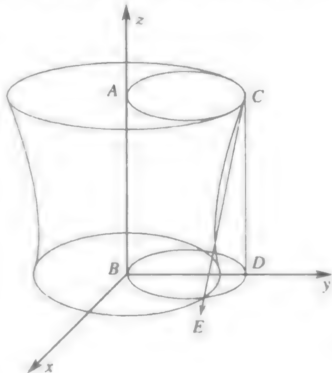
例 6.24(浙江省2007年竞赛题) 有一张边长为4π的正方形纸(如图)，C、D分别为AA'、BB'的中点，E为DB'的中点. 现将纸卷成圆柱形，使A与A'重合，B与B'重合，并将圆柱面垂直放在xOy平面上，且B与圆点O重合，D落在y轴正向上，此时求：



(1) 通过C、E两点的直线绕z轴所得的旋转曲面方程；

(2) 此旋转曲面与xOy平面和过A点垂直于z轴的平面所围成的立体体积.

解析 (1) 依题意可知圆柱底面的半径$R=2$，故C点坐标取为$(0,4,4\pi)$，E点坐标为$(2,2,0)$，$\overrightarrow{EC}=(-2,2,4\pi)$，因此过$C$、$E$两点的直线方程为



$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{4\pi}$$

所以旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=\left(2-\frac{z}{2\pi}\right)^2+\left(2+\frac{z}{2\pi}\right)^2$$

即

$$x^2+y^2=8+\frac{z^2}{2\pi^2}$$

(2) 如右上图，旋转曲面在垂直于z轴方向的截面是一个半径为$\sqrt{8+\frac{z^2}{2\pi^2}}$的圆，故所求体积$V$为

$$V=\int_0^{4\pi}\pi\left(8+\frac{z^2}{2\pi^2}\right)\mathrm{d}z=32\pi^2+\frac{32}{3}\pi^2=\frac{128}{3}\pi^2$$

6.2.5　空间曲线的方程与空间曲线的切线(例6.25—6.30)

例6.25(南京大学1996年竞赛题)　记曲面 $z=x^2+y^2-2x-y$ 在区域

$$D: x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 2x+y\leqslant 4$$

上的最低点 P 处的切平面为 π，曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处的切线为 l，求点 P 到 l 在 π 上的投影 l' 的距离 d.

解析　由 $z'_x=2x-2=0$，$z'_y=2y-1=0$ 解得驻点为 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$. 在驻点处

$$A=z''_{xx}=2,\quad B=z''_{xy}=0,\quad C=z''_{yy}=2$$

因 $\Delta=B^2-AC=-4<0$，且 $A>0$，所以 $z\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{4}$ 为极小值，而驻点惟一，故 $z\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{4}$ 为最小值，即点 $P\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$ 为曲面上最低点.

曲面在 P 点处的切平面 π 的方程为 $z=-\dfrac{5}{4}$.

记 P_0 为 $(1,1,-2)$，曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在 P_0 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与平面 $x+y+z=0$ 在 P_0 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$ 分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(2,2,-4),\quad \boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$$

故其交线在 P_0 的切向量为

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(2,2,-4)\times(1,1,1)=6(1,-1,0)$$

于是切线 l 的方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{0}$$

写为一般式为 $\begin{cases}x+y-2=0,\\ z+2=0.\end{cases}$ 过直线 l 的平面束方程为

$$(x+y-2)+\lambda(z+2)=0$$

其法向量 $\boldsymbol{n}_\lambda=(1,1,\lambda)$，令 $\boldsymbol{n}_\lambda\perp\boldsymbol{\eta}_\pi$，$\boldsymbol{\eta}_\pi=(0,0,1)$，故 $\lambda=0$，即过 l 的平面 $x+y-2=0$ 与平面 π 垂直，于是 l 在平面 π 内的投影 l' 的方程为

$$\begin{cases}x+y-2=0,\\ z=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

点 $\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$ 到 l' 的距离为 $d=\dfrac{\left|1+\dfrac{1}{2}-2\right|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{2}$.

例 6.26(江苏省1998年竞赛题)　当$k(>0)$取何值时,曲线$\begin{cases} z=ky, \\ \dfrac{x^2}{2}+z^2=2y \end{cases}$是圆?并求此圆的圆心坐标以及该圆在$zx$平面、$yz$平面上的投影.

解析　题给曲线在xy平面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+2k^2\left(y-\dfrac{1}{k^2}\right)^2=\dfrac{2}{k^2}, \\ z=0 \end{cases}$$

它是xy平面上中心为$\left(0,\dfrac{1}{k^2}\right)$,半轴长分别为$\dfrac{\sqrt{2}}{k}$,$\dfrac{1}{k^2}$的椭圆. 设所求圆的圆心$A$的坐标为$(a,b,c)$,由于点$A$在椭圆柱面$x^2+2k^2\left(y-\dfrac{1}{k^2}\right)^2=\dfrac{2}{k^2}$的中心轴上,故$a=0$,$b=\dfrac{1}{k^2}$,$c=kb=\dfrac{1}{k}$. 欲使题给曲线为圆,等价于$|OA|=\dfrac{\sqrt{2}}{k}$,即$\sqrt{0^2+\dfrac{1}{k^4}+\dfrac{1}{k^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{k}$,由此可解得$k=1$. 于是$k=1$时,题给曲线为圆,圆心坐标为$(0,1,1)$.

将原方程组$\begin{cases} z=y, \\ x^2-4y+2z^2=0 \end{cases}$消去$y$,得圆在$zx$平面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+2z^2-4z=0, \\ y=0 \end{cases}$$

由于题给曲线圆在平面$z=y$上,此平面垂直yz平面,所以圆在yz平面上的投影为一线段,即

$$\begin{cases} y=z, \\ x=0 \end{cases} \quad (0\leqslant z\leqslant 2)$$

例 6.27(全国大学生2011年决赛题)　设$F(x,y,z)$,$G(x,y,z)$有连续的偏导数,$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\neq 0$,曲线$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记$\Gamma$在$xOy$平面上的投影曲线为$S$,求$S$上过点$(x_0,y_0)$的切线方程.

解析　所求切线为Γ过点P_0的切线在xOy平面上的投影,而Γ过点P_0的切线为两个曲面的切平面的交线,即

$$\begin{cases} F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0, \\ G_x'(P_0)(x-x_0)+G_y'(P_0)(y-y_0)+G_z'(P_0)(z-z_0)=0 \end{cases}$$

两式消去z得

$$\begin{aligned} &(F_x'(P_0)G_z'(P_0)-F_z'(P_0)G_x'(P_0))(x-x_0) \\ &\quad +(F_y'(P_0)G_z'(P_0)-F_z'(P_0)G_y'(P_0))(y-y_0)=0 \end{aligned} \qquad (*)$$

由于

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\right|_{P_0} = F'_x(P_0)G'_z(P_0) - F'_z(P_0)G'_x(P_0) \neq 0$$

所以(∗)式即为所求切线的方程.

例 6.28(江苏省 2012 年竞赛题)　已知点 $A(1,2,-1)$,$B(5,-2,3)$ 在平面 Π: $2x-y-2z=3$ 的两侧,过点 A,B 作球面 Σ 使其在平面 Π 上截得的圆 Γ 最小.

(1) 求球面 Σ 的球心坐标与该球面的方程;

(2) 证明:直线 AB 与平面 Π 的交点是圆 Γ 的圆心。

解析　(1) $\overrightarrow{AB}=4(1,-1,1)$,线段 AB 的中点是 $(3,0,1)$,于是线段 AB 的垂直平分面 Π_1 的方程为 $x-y+z=4$.

因球心在 Π_1 上,设球心为 $O(a,b,4-a+b)$,则 $OA^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(5-a+b)^2$. 设球心 O 到平面 Π 的距离为 d,则

$$d^2=\left(\frac{2a-b-2(4-a+b)-3}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(4a-3b-11)^2$$

设圆 Γ 的半径为 r,则

$$u=r^2=OA^2-d^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(5-a+b)^2-\frac{1}{9}(4a-3b-11)^2$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial a}=2(a-1)-2(5-a+b)-\dfrac{8}{9}(4a-3b-11)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial b}=2(b-2)+2(5-a+b)+\dfrac{6}{9}(4a-3b-11)=0\end{cases}$$

化简得 $\begin{cases}2a+3b=10,\\ a+3b=2.\end{cases}$ 解得 $a=8$,$b=-2$. 因驻点是惟一的,圆 Γ 的半径 r 的最小值存在,故 $a=8$,$b=-2$ 为所求的球心坐标分量,于是球心坐标为 $O(8,-2,-6)$. 因 $OA=\sqrt{90}$,所以球面方程为 $(x-8)^2+(y+2)^2+(z+6)^2=90$.

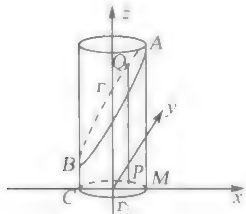
(2) 设直线 AB 的参数方程为 $x=1+t$,$y=2-t$,$z=-1+t$,代入平面 Π 的方程,解得 $t=1$,故直线 AB 与平面 Π 的交点 M 的坐标为 $M(2,1,0)$. 平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-2)$,因 $\overrightarrow{OM}=(-6,3,6)=-3(2,-1,-2)$,显然 $\overrightarrow{OM}\parallel \boldsymbol{n}\Rightarrow OM\perp \Pi$,于是点 M 是圆 Γ 的圆心.

例 6.29(江苏省 2006 年竞赛题)　设圆柱面 $x^2+y^2=1(z\geqslant 0)$ 被柱面 $z=x^2+2x+2$ 截下的(有限)部分为 Σ. 为计算曲面 Σ 的面积,我们用薄铁片制作 Σ 的模型,$A(1,0,5)$,$B(-1,0,1)$,$C(-1,0,0)$ 为 Σ 上三点,将 Σ 沿线段 BC 剪开并展成平面图形 D. 建立平面直角坐标系,使 D 位于 x 轴的正上方,点 A 的坐标为 $(0,5)$. 试写出 D 的边界的方程,并求 D 的面积.

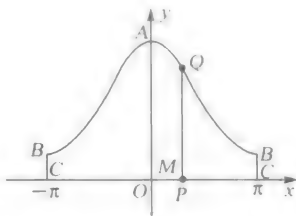
解析　圆柱面与柱面的交线 Γ 在 xy 平面上的投影为圆(如下图(a)所示)Γ_1: $x^2+y^2=1\ (z=0)$,取 $M(1,0,0)$,在 Γ_1 上取点 $P(\cos t,\sin t,0)$,$\overset{\frown}{MP}$ 的弧长为 t,过 P 作 $PQ\parallel z$ 轴,Q 为 PQ 与 Γ 的交点,Q 的坐标为 $(\cos t,\sin t,(\cos t+1)^2+1)$. 如下图(b)所示,在 xy 平面上展开后,P 的坐标为 $(t,0)$,Q 的坐标为 $(t,\cos^2 t+2\cos t+$

2),故 D 的边界曲线由 $y=\cos^2 x+2\cos x+2$ 与 $x=\pm\pi$, $y=0$ 组成. D 的面积为

$$S=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 x+2\cos x+2)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\cdot 2\pi=5\pi$$



(a)



(b)

例 6.30(江苏省 2006 年竞赛题) 设锥面 $z^2=3x^2+3y^2(z\geqslant 0)$ 被平面 $x-\sqrt{3}z+4=0$ 截下的(有限)部分为 Σ.

(1) 求曲面 Σ 的面积;

(2) 用薄铁片制作 Σ 的模型, $A(2,0,2\sqrt{3})$, $B(-1,0,\sqrt{3})$ 为 Σ 上的两点, O 为原点,将 Σ 沿线段 OB 剪开并展成平面图形 D,以 OA 方向为极轴建立平面极坐标系,试写出 D 的边界的极坐标方程.

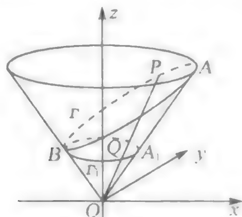
解析 (1) 锥面与平面的交线 Γ: $\begin{cases}z^2=3x^2+3y^2,\\ x-\sqrt{3}z+4=0\end{cases}$ 在 xy 平面上的投影为 $\frac{4}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}y^2=1$,此为一椭圆,它所围图形 D_1 的面积为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}\pi$, Σ 的面积为

$$S=\iint_{D_1}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\sqrt{2}\pi$$

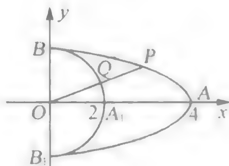
(2) **方法 1** 交线 Γ 的球坐标方程为

$$r=\frac{8}{3-\cos\theta},\quad \varphi=\frac{\pi}{6}$$

作平面 $z=\sqrt{3}$ 交 Σ 于 Γ_1, Γ_1 是半径为 1 的圆(如下图(a)所示),其上任一点到 O 的距离为 2. 在 Γ 上取点 P,设其球坐标为 (r_0,φ_0,θ_0),则 $r_0=\frac{8}{3-\cos\theta_0}$, $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$. 连接 OP 交 Γ_1 于 Q,连接 OA 交 Γ_1 于 A_1, Q 的球坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{6},\theta_0\right)$, $\overset{\frown}{A_1Q}$ 的弧长为 θ_0.



(a)



(b)

如上图(b),在平面图形 D 中,设 P 的极坐标为(ρ,θ),则 Q 的极坐标为$(2,\theta)$,$\overset{\frown}{A_1Q}$ 的弧长为 2θ,故 $\theta_0=2\theta$. 因 $r_0=\rho$,于是 D 的边界的极坐标方程为

$$\rho=\frac{8}{3-\cos 2\theta}\quad 与 \quad \theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

方法 2　先求交线 Γ 的柱坐标方程. 令 $x=\rho_1\cos\theta, y=\rho_1\sin\theta, z=z$(这里$(\rho_1,\theta,z)$是 Γ 上点的柱坐标),则 Γ 的柱坐标方程为

$$\rho_1=\frac{4}{3-\cos\theta_1},\quad z=\sqrt{3}\rho_1$$

作平面 $z=\sqrt{3}$,交Σ 于Γ_1,Γ_1 为半径是 1 的圆(如图(a) 所示),其上任一点到原点 O 的距离为2. 在Γ上任取点P,设其柱坐标为(ρ_1,θ_1,z_1),连接OP 交Γ_1 于Q,连接OA 交 Γ_1 交 A_1,则 Q 的柱坐标为$(1,\theta_1,\sqrt{3})$,$\overset{\frown}{A_1Q}$ 的弧长为θ_1.

如图(b),在平面图形D中,设P的极坐标为(ρ,θ),则Q的极坐标为$(2,\theta)$,$\overset{\frown}{A_1Q}$ 的弧长为 2θ,故 $\theta_1=2\theta$. 因为$\rho^2=\rho_1^2+z^2=4\rho_1^2$,所以$\rho=2\rho_1$,于是 D 的边界曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{8}{3-\cos 2\theta}\quad 与 \quad \theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

练习题六

1. 设 xy 平面上三点的坐标为(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2),求证:以这三点为顶点的三角形的面积为$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$的绝对值.

2. 求通过直线$\begin{cases}4x-y+3z-1=0,\\ x+5y-z+2=0\end{cases}$且与平面 $2x-y+5z+2=0$ 垂直的平面方程.

3. 求通过直线$\begin{cases}x+5y+z=0,\\ x-z+4=0\end{cases}$且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{4}$的平面方程.

4. 求通过点$(-1,0,1)$,垂直于直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{1}$且与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

5. 求通过点$(1,2,1)$,且与两直线

$$L_1:\begin{cases}x-2y-z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases}\quad 和 \quad L_2:\begin{cases}2x-y+z=0,\\ x-y-z=0\end{cases}$$

都相交的直线方程.

6. 求点(2,6,5)关于直线$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{1}$的对称点.

7. 求点(0,0,3)到直线$x-1=\dfrac{y+1}{-1}=z$的距离.

8. 求以直线$\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+1}{-2}$为对称轴且半径等于2的圆柱面的方程.

9. 求两条直线$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{3}$与$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-2}{1}$间的距离.

10. 求由$y=x\varphi\left(\dfrac{z}{x}\right)+\psi(yz)$确定的曲面$z=z(x,y)$在点(1,-1,1)处的切平面方程和法线方程.

11. 求通过直线$\begin{cases}10x+2y-2z-27=0,\\x+y-z=0\end{cases}$且与曲面$3x^2+y^2-z^2=27$相切的平面方程.

12. 求直线$\begin{cases}x=3-t,\\y=-1+2t,\\z=5+8t\end{cases}$在平面$x-y+3z+8=0$上的投影的方程.

13. 求直线$\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$绕$y$轴旋转一周的旋转曲面的方程.

14. 求立体

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 2x+2y-z\leqslant 4,\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2\leqslant 4\}$$

的体积.

专题 7　级数

7.1　基本概念与内容提要

7.1.1　数项级数的主要性质

设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 A，否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 也收敛.

3）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 发散.

4）对收敛级数任意加括号得到的新级数仍收敛，且其和不变.

5）正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界.

7.1.2　正项级数敛散性判别法

1）比较判别法 Ⅰ：设 $0\le a_n\le b_n$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

2）比较判别法 Ⅱ：设 $a_n\ge0$，$b_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$，则当 $0\le\lambda<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $0<\lambda\le+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

3）比值判别法：设 $a_n>0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$，则当 $0\le\lambda<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\lambda>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

4）根值判别法：设 $a_n\ge0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$，则当 $0\le\lambda<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\lambda>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

5）两个重要级数

（1）几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$：当 $|q|<1$ 时收敛，当 $|q|\geqslant 1$ 时发散. 且当 $|q|<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n=\dfrac{a}{1-q}$.

（2）p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$：当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

7.1.3　任意项级数敛散性判别法

1）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛，此时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

2）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，此时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

3）莱布尼兹判别法：设交错级数 $\sum\limits_{n}(-1)^n a_n$，$a_n>0$，若数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则该级数收敛(可能是绝对收敛或条件收敛).

4）对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda$，则当 $0\leqslant\lambda<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛；当 $\lambda>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

7.1.4　幂级数的收敛半径、收敛域与和函数

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$，这里 $0\leqslant R\leqslant+\infty$. 当 $R=0$ 时，幂级数仅当 $x=0$ 时收敛(收敛于 a_0)；当 $R=+\infty$ 时，幂级数 $\forall x\in\mathbf{R}$ 收敛，即幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$；当 $0<R<+\infty$ 时，称 R 为幂级数的收敛半径，称 $(-R,R)$ 为幂级数的收敛区间. 收敛区间与使幂级数收敛的端点 $x=R$ 或 $x=-R$ 的并集，称为幂级数的收敛域.

幂级数的和函数在其收敛域上为连续函数；幂级数在其收敛区间内可逐项求导数、逐项求积分，且其收敛半径不变，但在两个端点的敛散性可能改变. 此性质常用于求幂级数的和函数.

7.1.5　初等函数关于 x 的幂级数展开式

1）公式法：常用的公式有

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\quad(|x|<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\quad(|x|<+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots\quad(|x|<+\infty)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots\quad(-1\leqslant x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\cdots\quad(|x|<1)$$

2）先用公式法求 $f'(x)$ 的关于 x 的幂级数展开式，再逐项积分求 $f(x)$ 的幂级数展开式.

3）先用公式法求 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 的关于 x 的幂级展开式，再逐项求导数求 $f(x)$ 的幂级数展开式.

7.1.6　傅氏级数

1）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数，则有傅氏系数公式：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots$$

函数 $f(x)$ 的傅氏级数展开式为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

2）收敛定理：若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在$[-\pi,\pi]$上除有限个第一类间断点外均连续，且在$[-\pi,\pi]$上只有有限个极值点，则函数 $f(x)$ 的傅氏级数展开式在$x\in(-\infty,+\infty)$ 处收敛于$\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]$.

3）正弦级数与余弦级数

若 $f(x)$ 是周期为 2π 的偶函数，则 $f(x)$ 的傅氏级数展开式为余弦级数，即

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

其中 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.

若 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数，则 $f(x)$ 的傅氏级数展开式为正弦级数，即

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

其中 $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$.

若函数 $f(x)$ 只给出在 $[0,\pi]$ 上的定义,则既可将 $f(x)$ 作偶延拓,使 $f(x)$ 成为周期为 2π 的偶函数,求其余弦级数;也可将 $f(x)$ 作奇延拓,使 $f(x)$ 成为周期为 2π 的奇函数,求其正弦级数.

7.2 竞赛题与精选题解析

7.2.1 判别正项级数的敛散性(例 7.1—7.14)

例 7.1(浙江省 2002 年竞赛题) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 为满足 $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}\ (n \geq 1)$ 的两个实数列,已知 $a_n > 0\ (n \geq 1)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ 也收敛.

解析 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.因 $a_n > 0$,且

$$b_n = \ln(e^{a_n} - a_n) = \ln\left(1 + a_n + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2) - a_n\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)\right) \sim \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2) \sim \frac{a_n^2}{2} \quad (n \to \infty)$$

故 $b_n > 0$,且 $\dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{a_n}{2} \sim a_n$,于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{a_n}$ 收敛.

例 7.2(江苏省 2010 年竞赛题) 已知数列 $\{a_n\}$:$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \cdots, a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}\ (n = 2,3,\cdots)$,记 $x_n = \dfrac{1}{a_n}$,判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的敛散性.

解析 已知 $a_1 = 1 > 0, a_2 = 2 > 0, a_2 - a_1 = 1 > 0$,归纳设 $a_n > 0, a_n - a_{n-1} > 0$,则

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_{n-1} = (a_n - a_{n-1}) + a_n > 0$$

即 $a_{n+1} > a_n > 0$,所以数列 $\{a_n\}$ 严格增.且 $\forall n \in \mathbf{N}, a_n > 0$,由

$$3a_n = a_{n-1} + a_{n+1} < 2a_{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n > 0 \Rightarrow 0 < x_{n+1} < \frac{2}{3}x_n$$

$$\Rightarrow \qquad 0 < x_n < \frac{2}{3}x_{n-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 x_{n-2} < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ 收敛,应用比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

例 7.3（全国大学生 2015 年决赛题）　设 $p>0, x_1=\frac{1}{4}, x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}(n=1,2,\cdots)$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛并求其和.

解析　记 $a_n=x_n^p$，则 $a_1=x_1^p=\frac{1}{4^p}$，$a_{n+1}=a_n+a_n^2$，由于 $a_{n+1}-a_n=a_n^2\geqslant 0$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调增加. 若数列 $\{a_n\}$ 有上界，则 $\{a_n\}$ 收敛. 我们令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $A-A=A^2\Rightarrow A=0$，这是不可能的，因为 $a_n\geqslant a_1=\frac{1}{4^p}>0$，所以数列 $\{a_n\}$ 上无界，即 $\lim a_n=+\infty$.

由 $a_{n+1}=a_n+a_n^2=a_n(1+a_n)$，可得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1+a_n)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n}\Rightarrow\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{1+x_n^p}$ 的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1}=4^p$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛，且其和为 4^p.

例 7.4（全国大学生 2013 年预赛题）　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

解析　由于

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln n\quad(n\geqslant 2)$$

故 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n(n\geqslant 1)$. 当 n 充分大时，因为 $1+\ln n<\sqrt{n}$，所以

$$0<\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}\leqslant\frac{1+\ln n}{(n+1)(n+2)}\leqslant\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\quad(n\to\infty)$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，应用比较判别法，即得原级数收敛.

考虑原级数的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$
$$=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\frac{a_3-a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{a_n}{n+2}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

因 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+1}\to 0, 0<\frac{a_n}{n+2}\leqslant\frac{1+\ln n}{n+2}\to 0$，故 $S_n\to 1$. 即原级数的和为 1.

例 7.5（全国大学生 2010 年预赛题） 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，证明：

（1）当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛；

（2）当 $\alpha\leqslant 1$ 且 $S_n\to+\infty(n\to\infty)$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

解析 （1）当 $\alpha>1$ 时，设 $f(x)=x^{1-\alpha}$，在区间 $[S_{n-1},S_n]$ 上应用拉格朗日中值定理，必 $\exists\xi\in(S_{n-1},S_n)$，使得

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})\Leftrightarrow\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}=(1-\alpha)\frac{a_n}{\xi^\alpha}$$

由此式可得

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha}\leqslant\frac{a_n}{\xi^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$$

设正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$ 的部分和为 σ_n，由于

$$\sigma_n=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_1^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_2^{\alpha-1}}+\frac{1}{S_2^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_3^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha-1}}\right)<\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}$$

所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$ 收敛，应用比较判别法即得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛.

（2）当 $\alpha=1$ 时，设 $g(x)=\ln x$，在区间 $[S_{n-1},S_n]$ 上应用拉格朗日中值定理，必 $\exists\eta\in(S_{n-1},S_n)$，使得

$$g(S_n)-g(S_{n-1})=g'(\eta)(S_n-S_{n-1})\Leftrightarrow \ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{a_n}{\eta}$$

由此式可得

$$\frac{a_n}{S_{n-1}}>\frac{a_n}{\eta}=\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}\Leftrightarrow\frac{a_n}{S_n}=\frac{a_n}{S_{n-1}}\frac{S_{n-1}}{S_n}>\frac{a_n}{\eta}\frac{S_{n-1}}{S_n}=\frac{S_{n-1}}{S_n}\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

设正项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$的部分和为$\sigma_n$，由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sigma_n&=\lim_{n\to\infty}(\ln S_2-\ln S_1+\ln S_3-\ln S_2+\cdots+\ln S_n-\ln S_{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}(\ln S_n-\ln a_1)=+\infty\end{aligned}$$

所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$发散. 又由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{S_n}\right)=1\quad（这里设数列\{a_n\}收敛）$$

所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$发散，应用比较判别法，即得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散.

当$\alpha<1$时，不妨设$S_n>1$，因$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\geqslant\frac{a_n}{S_n}$，应用比较判别法，即得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散.

例 7.6（浙江省 2011 年竞赛题）　已知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，试证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$收敛.

解析　对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$的部分和

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[k]{a_1\cdot 2a_2\cdot 3a_3\cdot\cdots\cdot ka_k}}{\sqrt[k]{k!}}$$

应用不等式$k!\geqslant\left(\frac{k}{2}\right)^k(k\in\mathbf{N}^*)$与几何平均数小于等于算术平均数，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[k]{a_1\cdot 2a_2\cdot 3a_3\cdot\cdots\cdot ka_k}}{\sqrt[k]{k!}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{ia_i}{k}=2\sum_{i=1}^{n}a_i\left(i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$$

由于

$$\begin{aligned}i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}&=i\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\\&<i\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)\\&=i\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$= i\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i}-\frac{1}{n}\right)< i\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{i}+1\leqslant 2 \quad (i\geqslant 1)$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i\left(i\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}\right)<4\sum_{i=1}^{n}a_i$$

由于收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有界，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 的部分和有界，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛.

例 7.7（莫斯科动力学院 1975 年竞赛题） 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（其中 $a_n>0$），若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}{\ln n}=\lambda$，求证：当 $\lambda>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\lambda<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

解析 (1) 当 $\lambda>1$ 时，取 p：$1<p<\lambda$，由极限性质，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}>p\Rightarrow a_n<\frac{1}{n^p}$$

而 $p>1$ 时 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$ 收敛，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 当 $\lambda<1$ 时，取 p：$\lambda<p<1$，由极限性质，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}<p\Rightarrow a_n>\frac{1}{n^p}$$

而 $p<1$ 时 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$ 发散，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

例 7.8（全国大学生 2012 年预赛题） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

解析 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=c$（$c>0$ 或 $+\infty$），取实数 d（$0<d<c$），则 $\exists N\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>d\Rightarrow\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>da_{n+1}>0 \tag{1}$$

因此数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$单调减少，且显然有下界，所以$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$收敛，记为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$。又由于级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$的部分和$S_m$满足

$$\lim_{m\to\infty}S_m=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}+\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}-\frac{a_{N+2}}{b_{N+2}}+\cdots+\frac{a_{N+m}}{b_{N+m}}-\frac{a_{N+m+1}}{b_{N+m+1}}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{N+m+1}}{b_{N+m+1}}\right)=\frac{a_N}{b_N}-\lambda$$

所以级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$收敛，再由(1)式，应用比较判别法得级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}da_{n+1}$收敛，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=c$（$c<0$或$-\infty$），取实数$d$（$c<d<0$），则$\exists N\in\mathbf{N}^*$，当$n\geqslant N$时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}<d<0\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

由此可得$n\geqslant N$时有

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot a_N>\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_{N+1}}{b_N}\cdot a_N=\frac{a_N}{b_N}b_n \tag{2}$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，所以级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{a_N}{b_N}b_n$发散，再由(2)式，应用比较判别法得级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$发散，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

例 7.9（精选题）　设函数$\varphi(x)$是$(-\infty,+\infty)$上连续的周期函数，周期为1，且$\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x=0$，函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，$a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

解析　作积分换元，令$nx=t$，则

$$a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

令$G(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t$，则$G(0)=0$，$G'(x)=\varphi(x)$，且

$$G(n)=\int_0^n\varphi(t)\mathrm{d}t=n\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

$$G(x+n)=\int_0^{x+n}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+n}\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t+n\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t+0=G(x)$$

所以$G(x)$是在$(-\infty,+\infty)$上连续可导的周期函数.于是$G(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界,记$|G(x)|\leqslant M_1$. $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$a_n=\frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}G(t)=\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{t}{n}\right)G(t)\Big|_0^n-\int_0^n f'\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{n}G(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\frac{1}{n^2}\int_0^n f'\left(\frac{t}{n}\right)G(t)\mathrm{d}t$$

因$f'(x)$在$[0,1]$上连续,所以$f'(x)$在$[0,1]$上有界,即$\forall x\in[0,1]$有$|f'(x)|\leqslant M_2$.于是

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^n M_1M_2\mathrm{d}t=\frac{M_1M_2}{n}\Rightarrow a_n^2\leqslant\frac{(M_1M_2)^2}{n^2}$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(M_1M_2)^2}{n^2}$收敛,故由比较判别法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

例 7.10(浙江省 2009 年竞赛题) 设$f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}+x-r$,其中$r>0$.(1) 证明:$f_n(x)$在$(0,+\infty)$内有惟一的零点$x_n$;(2) 求$r$为何值时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛,为何值时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散.

解析 (1) 因$x>0$时,$\forall n\in\mathbf{N}^*$,有$f_n(x)$连续,且$f_n'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}+1>0$,所以$f_n(x)$严格增. 又因为

$$f_n(0)=-r<0,\quad f_n(r)=\sqrt[n]{r}>0$$

根据零点定理,$f_n(x)$在$(0,r)(\subset(0,+\infty))$内有惟一的零点$x_n$.

(2) 当$0<r<1$时,$f_n(r^n)=\sqrt[n]{r^n}+r^n-r>0$.又由$f_n(x)$严格增可知$0<x_n<r^n$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$收敛,由比较判别法可得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛.

当$r>1$时,因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,所以只要$n$充分大,就有

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-r<0$$

由$f_n(x)$严格增可知$x_n>\frac{1}{n}>0$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,由比较判别法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散.

当$r=1$时,因为

$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right)=\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2n}-1=\frac{1}{2n}\left(1-2n+2n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\right)=\frac{1}{2n}(1-2n(1-\alpha))$$

其中 $\alpha = \frac{1}{\sqrt[n]{2n}}(0 < \alpha < 1)$，由于

$$2n(1-\alpha) = 2n\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}} = \frac{2n-1}{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}}$$

$$> \frac{n}{1+1+\cdots+1} = \frac{n}{n} = 1$$

故 $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) < 0$. 由 $f_n(x)$ 严格增可知 $x_n > \frac{1}{2n} > 0$，由比较判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

综上所述，当 $0 < r < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；当 $r \geqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

例 7.11（精选题） 设函数 $f(x)$ 在 $|x| \leqslant 1$ 上有定义，在 $x=0$ 的某邻域内有连续的二阶导数，当 $x \neq 0$ 时 $f(x) \neq 0$，当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小，且 $\forall n \in \mathbf{N}$，有

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leqslant \left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right|$$

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|b_n b_{n+1}|}$ 收敛.

解析 因 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有连续的二阶导数，所以 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，且 $\exists K>0$，使 $|x|$ 充分小时 $|f''(x)| \leqslant K$. 应用马克劳林展式，有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

这里 ξ 介于 0 与 x 之间. 当 $|x|$ 充分小时，$|f''(\xi)| \leqslant K$，所以 n 充分大时，有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2}|f''(\xi)|\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{K}{2}\frac{1}{n^2}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

由于

$$|b_{n+1}| \leqslant |b_n| \left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right| \leqslant |b_{n-1}| \left|\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right| \left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right|$$

$$= |b_{n-1}| \left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right| \leqslant \cdots \leqslant |b_1| \left|\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f(1)}\right|$$

$$= \left|\frac{b_1}{f(1)}\right|\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|$收敛，因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b_1}{f(1)}\right|\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|$也收敛.应用比较判别法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_{n+1}|$收敛，由此得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$也收敛. 因为

$$\sqrt{|b_nb_{n+1}|}\leqslant\frac{1}{2}(|b_n|+|b_{n+1}|)$$

应用比较法即得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_nb_{n+1}|}$收敛.

例 7.12(精选题) (1) 先讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$的敛散性，又已知$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)$，证明数列$\{x_n\}$收敛；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

解析 (1) 应用$\ln(1+x)$的马克劳林展式，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\quad(x\to 0)$$

所以当n充分大时，有

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$收敛. 该级数的部分和为

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)=x_n$$

所以数列$\{x_n\}$收敛.

(2) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$，设$x_n\to A$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\ln n}=0 \qquad (*)$$

应用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}=1$，由(*)式即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\ln n}=1$$

例 7.13(北京市 1992 年竞赛题) 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，求证级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$收敛，并求其和.

解析 令$F(x)=(1-x-x^2)f(x)$，则$F(x)=1$. 根据莱布尼兹公式，对上式两边求$(n+2)$阶导数，有

$$\begin{aligned}F^{(n+2)}(x)&=f^{(n+2)}(x)(1-x-x^2)+C_{n+2}^{1}f^{(n+1)}(x)(-1-2x)\\&\quad+C_{n+2}^{2}f^{(n)}(x)(-2)\\&=0\end{aligned}$$

令$x=0$得

$$(n+2)!a_{n+2}+C_{n+2}^{1}a_{n+1}(n+1)!(-1)+C_{n+2}^{2}a_n n!(-2)=0$$

$$(n+2)!a_{n+2}-(n+2)!a_{n+1}-(n+2)!a_n=0$$

于是

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

且$a_0=\dfrac{1}{0!}f^{(0)}(0)=1$，$a_1=\dfrac{1}{1!}f'(0)=\left.\dfrac{-(-1-2x)}{(1-x-x^2)^2}\right|_{x=0}=1$，归纳可得$n\to\infty$时有$a_n\to\infty$. 原级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k\cdot a_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_k\cdot a_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\\&=\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\&=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\to 2\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

于是级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$收敛，且和为 2.

例 7.14(莫斯科工程物理学院 1975 年竞赛题) 试举出一个收敛的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中$a_n\neq o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

解析 当n为某正整数的平方时，取$a_n=\dfrac{1}{n}$，当n不是某正整数的平方时，取$a_n=\dfrac{1}{n^2}$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\cdots \quad (1)$$

这里 $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$. 下面证明该级数是收敛的. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots \quad (2)$$

收敛,所以加括号后级数

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{16^2}\right)+\cdots \quad (3)$$

也收敛. 又由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\cdots \quad (4)$$

收敛,所以(3) 与(4) 式逐项相减后所得级数

$$\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}\right)+\left(\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots \quad (5)$$

也收敛. 再将收敛级数(5) 与(2) 逐项相加即得级数(1) 收敛.

7.2.2 判别任意项级数的敛散性(例 7.15—7.27)

例 7.15(北方工业大学 1999 年竞赛题) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(b_n \geqslant 0)$ 收敛,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 也收敛,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

解析 由 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛,故其部分和数列

$$S_n = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1} = a_n - a_0$$

收敛(当 $n\to\infty$),于是存在 A 使 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,且存在 $M \in \mathbf{R}^+$,使得 $|a_n| \leqslant M$. 所以 $|a_n b_n| \leqslant M|b_n|$,根据比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

例 7.16(广东省 1991 年竞赛题) 试判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan(\sqrt{n^2+2}\,\pi)$ 是否收敛. 若收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

解析 令 $a_n = \tan(\sqrt{n^2+2}\,\pi)$,则

$$a_n = \tan(\sqrt{n^2+2}-n)\pi = \tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

显见 $a_n \to 0(n\to\infty)$，且数列 $\{a_n\}$ 单调减 $(n=2,3,\cdots)$. 应用莱布尼兹判别法，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛. 因为

$$a_n=\tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}>\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}>\frac{2\pi}{n+1+n}>\frac{1}{n}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以原级数非绝对收敛. 故原级数条件收敛.

例 7.17（江苏省 2006 年竞赛题）　对常数 p，讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$$

何时绝对收敛、何时条件收敛、何时发散.

解析　令 $a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}(>0)$，则

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^p}=\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)n^p}\sim\frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}}$$

故当 $p+\frac{1}{2}>1\left(\text{即 } p>\frac{1}{2}\right)$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则原级数绝对收敛；当 $p+\frac{1}{2}\leqslant 1\left(\text{即 } p\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则原级数非绝对收敛.

当 $0<p+\frac{1}{2}\leqslant 1\left(\text{即} -\frac{1}{2}<p\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时显然 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 令

$$f(x)=x^p(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\quad(x>0)$$

由于

$$f'(x)=x^{p-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\left(p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

且 $x^{p-1}>0$，$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>0$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\left[p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right]=p+\frac{1}{2}>0$$

所以 x 充分大时 $f(x)$ 单调增，于是 n 充分大时，$a_n=\frac{1}{f(n)}$ 单调减少，应用莱布尼兹判别法推知 $-\frac{1}{2}<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时原级数条件收敛.

当 $p+\frac{1}{2}\leqslant 0$ 时 $a_n \nrightarrow 0(n\to\infty)$，故 $p\leqslant -\frac{1}{2}$ 时原级数发散.

例 7.18(全国大学生 2013 年决赛题)　若对于任意的趋向于 0 的序列 $\{x_n\}$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都是收敛的,试证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

解析　(用反证法)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$,则 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 于是存在单调增加的正整数数列 $\{n_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$,使得 $S_{n_1} \geq 1, S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq k$ $(k=2,3,\cdots)$. 取

$$x_n = \frac{1}{k}\operatorname{sgn} a_n \quad (n_{k-1}+1 \leqslant n \leqslant n_k)$$

则 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. 由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n &= (|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{n_1}|) + \frac{1}{2}(|a_{n_1+1}|+|a_{n_1+2}|+\cdots+|a_{n_2}|) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{k}(|a_{n_{k-1}+1}|+|a_{n_{k-1}+2}|+\cdots+|a_{n_k}|) + \cdots \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \cdots + \frac{1}{k}\cdot k + \cdots = 1+1+\cdots+1+\cdots\end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 发散,此与题设条件矛盾. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

例 7.19(江苏省 1998 年竞赛题)　设 $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n=0,1,2,\cdots$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\sqrt{2-a_n}$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散.

解析　$a_0 = 0$, $a_1 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} > a_0$,归纳设 $0 \leqslant a_{n-1} < a_n \Rightarrow 2 + a_{n-1} < 2 + a_n \Rightarrow \sqrt{2+a_{n-1}} < \sqrt{2+a_n}$,即 $a_n < a_{n+1}$,数列 $\{a_n\}$ 单调增加. 又 $a_1 < 2$,归纳设 $a_n < 2$,则 $\sqrt{2+a_n} < 2$,即 $a_{n+1} < 2$,所以数列 $\{a_n\}$ 有上界. 据单调有界准则得 $\{a_n\}$ 收敛. 令 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,则有 $A = \sqrt{2+A}$,解得 $A = 2$. 于是 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

令 $b_n = \sqrt{2-a_n}$,由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+a_n}}{2-a_n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4-(2+a_n)}{(2-a_n)(2+\sqrt{2+a_n})}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+a_n}}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

据比值判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,即原级数绝对收敛.

例 7.20(江苏省 2012 年竞赛题)　已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^k}{n-1}$ 为条件收敛,求常

数 k 的取值范围.

解析 令 $a_n = \dfrac{n^k}{n-1}$,因为

$$a_n = \frac{n^k}{n-1} = \frac{1}{n^{1-k} - n^{-k}} \sim \frac{1}{n^{1-k}}$$

所以,当 $1-k>1$,即 $k<0$ 时,原级数绝对收敛;当 $1-k\leqslant 1$,即 $k\geqslant 0$ 时,原级数非绝对收敛.

当 $k\geqslant 1$ 时,因为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n-1} = \begin{cases} \infty, & k>1; \\ 1, & k=1 \end{cases}$$

所以,$k\geqslant 1$ 时原级数发散.

当 $0\leqslant k<1$ 时,因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{n-1} = 0$,且 $\dfrac{n^k}{n-1} = \dfrac{1}{n^{1-k}-n^{-k}}$ 为单调减少,应用莱布尼兹判别法得原级数收敛.

综上,当 $0\leqslant k<1$ 时原级数条件收敛.

例 7.21(江苏省 1996 年竞赛题) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 存在,求 r 的值,并举出满足这些条件的例子.

解析 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,故该级数不可能为正项级数或负项级数. 由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |r|$$

(1) 若 $|r|<1$,则由比值判别法推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,此与条件矛盾,故 $|r|\geqslant 1$.

(2) 若 $|r|>1$,则由 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |r|>1$,推知 n 充分大时数列 $\{|a_n|\}$ 单调增,故 $|a_n| \nrightarrow 0 \Rightarrow a_n \nrightarrow 0$,此与条件矛盾,故 $|r|=1$,即 $r=1,-1$.

(3) 若 $r=1$,则由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$,推知 n 充分大时,a_n 与 a_{n+1} 同为正值或同为负值,此不可能.

综上,得 $r=-1$.

例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ 为条件收敛,且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^n} = -1$$

例 7.22(江苏省 1996 年竞赛题) 讨论级数 $1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{6^p} + \cdots$

的敛散性(p 为常数).

解析 当 $p=\frac{1}{2}$ 时,原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$,由于此为交错级数,$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调减少且收敛于0,由莱布尼兹判别法得 $p=\frac{1}{2}$ 时原级数收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时,原级数的通项 $a_n\nrightarrow 0$,所以原级数发散.

当 $p>\frac{1}{2}$ 时,考虑加括号(两项一括)的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{(2n)^p}\right) \tag{1}$$

由于 $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{(2n)^p}\left(在\ p>\frac{1}{2}\ 时\right)$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ 同阶,而 $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 同阶,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,所以 $p>\frac{1}{2}$ 时,加括号的级数(1)发散,因而原级数也发散.

当 $0<p<\frac{1}{2}$ 时,考虑如下加括号的级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \tag{2}$$

由于 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(在\ p<\frac{1}{2}\ 时\right)$ 与 $\frac{1}{(2n)^p}$ 同阶,而 $\frac{1}{(2n)^p}$ 与 $\frac{1}{n^p}$ 同阶,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散,所以 $0<p<\frac{1}{2}$ 时,加括号的级数(2)发散,因而原级数也发散.

综上所述,原级数仅当 $p=\frac{1}{2}$ 时收敛.

例 7.23(全国大学生 2011 年决赛题) 设函数 $f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数,$|f'(x)|<mf(x)$,其中 $0<m<1$. 任取实数 a_0,定义 $a_n=\ln f(a_{n-1})$,$n=1,2,\cdots$,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

解析 对函数 $F(x)=\ln f(x)$,在以 a_{n-1},a_{n-2} 为端点的区间上应用拉格朗日中值定理,得 $F(a_{n-1})-F(a_{n-2})=F'(\xi)(a_{n-1}-a_{n-2})$,即

$$\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2})$$

则

$$|a_n-a_{n-1}|\leqslant m|a_{n-1}-a_{n-2}|\leqslant m^2|a_{n-2}-a_{n-3}|\leqslant\cdots\leqslant m^{n-1}|a_1-a_0|$$

由于 $0<m<1$ 时,几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}m^{n-1}|a_1-a_0|$ 收敛,因此应用比较判别法可得

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

例 7.24(精选题)　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在$x=0$的邻域内f有连续的导数，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f\left(\frac{1}{n}\right)$的敛散性.

解析　由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a>0$，所以$x\to0$时，$f(x)\sim ax$，$f\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{a}{n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}$发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f\left(\frac{1}{n}\right)$非绝对收敛. 由条件可得$f(0)=0$，又

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$$

且$a>0$，因$f'(x)$在$x=0$连续，所以存在$x=0$的某邻域U，其内$f'(x)>0$，因而在U中$f(x)$严格增，于是当n充分大时，有

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right)<f\left(\frac{1}{n}\right)$$

即$\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$单调减，且$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)=0$，应用莱布尼兹法则即得原级数条件收敛.

例 7.25(全国大学生2016年决赛题)　设$I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，其中$n$为正整数.

(1) 若$n\geqslant2$，计算I_n+I_{n-2}；

(2) 设p为实数，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nI_n^p$的绝对收敛性与条件收敛性.

解析　(1) 应用定积分的换元积分法，可得

$$\begin{aligned}I_n+I_{n-2}&=\int_0^{\pi/4}(\tan^n x+\tan^{n-2}x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x\\&=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

(2) 当$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$时，$0\leqslant\tan x\leqslant1$，所以$\tan^{n+2}x\leqslant\tan^n x\leqslant\tan^{n-2}x$，应用定积分的保向性得

$$I_{n+2}\leqslant I_n\leqslant I_{n-2}\ \Rightarrow\ I_{n+2}+I_n\leqslant2I_n\leqslant I_n+I_{n-2}$$

又由第(1)问可得$I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$，于是

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{2(n-1)}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2^p(n+1)^p}\leqslant I_n^p\leqslant\frac{1}{2^p(n-1)^p}\quad(p>0)$$

① 当$p>1$时，因为$|(-1)^nI_n^p|=I_n^p\leqslant\frac{1}{2^p(n-1)^p}$，而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^p(n-1)^p}=\frac{1}{2^p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^p}$$

显然收敛,应用比较判别法得原级数绝对收敛.

② 当 $0<p\leqslant 1$ 时,因为 $|(-1)^nI_n^p|=I_n^p\geqslant\frac{1}{2^p(n+1)^p}$,而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^p(n+1)^p}=\frac{1}{2^p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p}$$

显然发散,应用比较判别法得原级数非绝对收敛. 由于

$$\frac{1}{2^p(n+1)^p}<I_n^p<\frac{1}{2^p(n-1)^p},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^p(n+1)^p}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^p(n-1)^p}=0$$

应用夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n^p=0$. 又数列 $\{I_n^p\}$ 显然单调减少,据莱布尼茨判别法得原级数为条件收敛.

③ 当 $p\leqslant 0$ 时,因为 $|(-1)^nI_n^p|=I_n^p\geqslant 2^{-p}(n-1)^{-p}\geqslant 1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^nI_n^p\neq 0$,因此原级数发散.

例 7.26(江苏省 2002 年竞赛题) 设 k 为常数. 试判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^k(\ln n)^2}$ 的敛散性. 何时绝对收敛?何时条件收敛?何时发散?

解析 记 $a_n=\frac{1}{n^k(\ln n)^2}$. 当 $k>1$ 时,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}=0$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ 收敛,所以 $k>1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛,故原级数在 $k>1$ 时绝对收敛.

当 $k=1$ 时,因为

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(\ln i)^2}\leqslant\frac{1}{2(\ln 2)^2}+\sum_{i=3}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2(\ln 2)^2}+\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2(\ln 2)^2}-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{2(\ln 2)^2}+\frac{1}{\ln 2}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 的部分和有上界,所以 $k=1$ 时,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛,故原级数在 $k=1$ 时绝对收敛.

当 $k<1$ 时,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-k}}{(\ln n)^2}=+\infty$$

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.所以 $k<1$ 时原级数非绝对收敛.

当 $0\leqslant k<1$ 时,$\{a_n\}$ 单调减,且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k(\ln n)^2}=0$$

应用莱布尼兹判别法得原级数在 $0\leqslant k<1$ 时条件收敛.

当 $k<0$ 时,因为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-k}}{(\ln n)^2}=+\infty$$

所以 $k<0$ 时原级数发散.

综上得:$k\geqslant 1$ 绝对收敛,$0\leqslant k<1$ 时条件收敛,$k<0$ 时发散.

例 7.27(江苏省2016年竞赛题)　已知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})n^{\lambda}\ln n$,其中实数 $\lambda\in[0,1]$.试对 λ 讨论该级数的绝对收敛、条件收敛与发散性.

解析　**方法 1**　设 $a_n=(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})n^{\lambda}\ln n$,则 $a_n>0$,且 $n\to\infty$ 时

$$a_n=n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})\frac{\ln n}{n^{1-\lambda}}=\frac{2\ln n}{(\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1-1/n^2})n^{1-\lambda}}\sim\frac{\ln n}{n^{1-\lambda}}=b_n$$

因为 $\lambda\in[0,1]$,即 $1-\lambda\leqslant 1$,所以$\frac{\ln n}{n^{1-\lambda}}>\frac{1}{n}(n\geqslant 3)$,而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,应用比较判别法得级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1-\lambda}}$发散,再应用比较判别法得原级数非绝对收敛.

(1) 当 $\lambda\in[0,1)$ 时,令 $f(x)=x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$,当 $x\geqslant 2$ 时,因

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}+x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4-1}-x^2}{\sqrt{x^4-1}}\right)<0\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x\geqslant 2$ 时单调减少,故 $f(n)=n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$ 单调减少.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x^{1-\lambda}}$,因 $0<1-\lambda\leqslant 1$,则

$$g'(x)=\frac{1-(1-\lambda)\ln x}{x^{2-\lambda}}<0\quad(x>e^{\frac{1}{1-\lambda}}\text{ 时})$$

所以 x 充分大时 $g(x)=\frac{\ln x}{x^{1-\lambda}}$ 单调减少,故 n 充分大时 $g(n)=\frac{\ln n}{n^{1-\lambda}}$ 单调减少.显然 $f(n)>0$, $g(n)>0$,故 $\{a_n\}=\{f(n)\cdot g(n)\}$ 也单调减少.又应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1-\lambda}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{(1-\lambda)x^{-\lambda}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\lambda)x^{1-\lambda}}=0$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty} g(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1-\lambda}}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1-1/n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1-\lambda}}=1\cdot 0=0$$

应用莱布尼茨判别法得交错级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

综上,可得原级数在$\lambda\in[0,1)$时为条件收敛.

(2) 当$\lambda=1$时,因为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1-1/n^2}}=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n\neq 0$$

所以原级数在$\lambda=1$时发散.

方法 2 数列$\{a_n\}$单调减少的证明改动如下,其他步骤同方法 1.

令$f(x)=(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})\cdot x^\lambda \ln x$,则

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)x^\lambda\ln x+(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})x^{\lambda-1}(\lambda\ln x+1)$$

$$=\frac{-2x^2\ln x+2\sqrt{x^4-1}(\lambda\ln x+1)}{\sqrt{x^4-1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})x^{1-\lambda}}<\frac{2x^2(1+\lambda\ln x)-2x^2\ln x}{\sqrt{x^4-1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})x^{1-\lambda}}$$

$$=\frac{2x^2(1-(1-\lambda)\ln x)}{\sqrt{x^4-1}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})x^{1-\lambda}}<0\quad(\text{当 } x>e^{\frac{1}{1-\lambda}}\text{ 时})$$

所以x充分大时$f(x)$单调减少,故n充分大时$\{a_n\}=\{f(n)\}$单调减少.

7.2.3 求幂级数的收敛域与和函数(例 7.28—7.45)

例 7.28(南京大学 1996 年竞赛题) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-(-1)^n}x^n$的收敛域.

解析 令$a_n=\frac{1}{n-(-1)^n}$,则收敛域半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-(-1)^{n+1}}{n-(-1)^n}=1$$

当$x=1$时原幂级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-(-1)^n}$,因为$\frac{1}{n-(-1)^n}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-(-1)^n}$发散,即$x=1$时原级数发散.

当$x=-1$时,原幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-(-1)^n}=-\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

令 $f(n)=\frac{n}{n^2-1}$，则 $f'(x)=\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}<0\ (x\geqslant 2)$，所以 $f(x)$ 严格减，因此 $f(n)$ 也严格减，又 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$，据莱布尼兹判别法得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$ 收敛；又因 $\frac{1}{n^2-1}\sim\frac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ 收敛. 于是 $x=-1$ 时原级数收敛.

故所求收敛域为 $[-1,1)$.

例 7.29（北京市 1996 年竞赛题）　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n8^n}{n\ln(n^3+n)}x^{3n-2}$ 的收敛域.

解析　令 $u_n(x)=\frac{(-1)^n8^n}{n\ln(n^3+n)}x^{3n-2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}8^{n+1}\cdot n\ln(n^3+n)\cdot x^{3n+1}}{(-1)^n8^n(n+1)\ln[(n+1)^3+(n+1)]\cdot x^{3n-2}}\right|$$
$$=8|x^3|$$

故当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时，原级数收敛.

当 $x=\frac{1}{2}$，原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4}{n\ln(n^3+n)}$，为莱布尼兹型级数，故收敛.

当 $x=-\frac{1}{2}$，原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\ln(n^3+n)}$，因为

$$\frac{4}{n\ln(n^3+n)}>\frac{4}{n\ln n^4}=\frac{1}{n\ln n}\quad(n\geqslant 2)$$

而 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，应用积分判别法可得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散. 因此由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n\ln(n^3+n)}$ 发散，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\ln(n^3+n)}$ 发散.

综上所述，收敛域为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

例 7.30（江苏省 2004 年竞赛题）　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n$ 的收敛域.

解析　令 $a_n=\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3^{n+1}+(-2)^{n+1})}{n(3^n+(-2)^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+(-2)\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}=3$$

所以幂级数的收敛半径 $R=3$. 当 $x=3$ 时,原幂级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}$. 因为 $\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}>\frac{1}{2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,由比较判别法知 $x=3$ 时原幂级数发散. 当 $x=-3$ 时,原级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(3^n+(-2)^n)}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 为莱布尼兹型级数,收敛;令 $b_n=\frac{2^n}{n(3^n+(-2)^n)}$,由于 $b_n>0$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}(3^n+(-2)^n)}{(n+1)\cdot 2^n(3^{n+1}+(-2)^{n+1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{3+(-2)\left(\frac{-2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}<1$$

由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,故 $x=-3$ 时原幂级数收敛. 故所求收敛域为 $[-3,3)$.

例 7.31(江苏省 2002 年竞赛题) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}x^n$ 的收敛域.

解析 令 $a_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$,因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故部分和 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty\ (n\to\infty)$,由于 $n\to\infty$ 时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\to 1$$

所以收敛半径 $R=1$. 当 $x=1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,由于

$$a_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}>\frac{1}{1+1+\cdots+1}=\frac{1}{n}$$

应用比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 当 $x=-1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$,因 $a_n\to 0$,且数列 $\{a_n\}$ 单调减,应用莱布尼兹判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 收敛. 所以原幂级数的收敛域

为$[-1,1)$.

例 7.32(北京市 1994 年竞赛题)　求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛半径及和函数.

解析　令$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,则$n\geqslant 1$时均有$1\leqslant a_n\leqslant n$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,由夹逼准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=1$,所以幂级数的收敛半径$R=1$.

令

$$u_n(x)=x^n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$v_0(x)=0,\quad v_n(x)=\frac{1}{n}x^n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

易知级数$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$,$\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x)$在$(-1,1)$上绝对收敛,应用绝对收敛级数的乘法规则,有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\cdot 0+x^{n-1}\cdot x+x^{n-2}\cdot\frac{1}{2}x^2+\cdots+1\cdot\frac{1}{n}x^n\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}[u_n(x)v_0(x)+u_{n-1}(x)v_1(x)+\cdots+u_0(x)v_n(x)]\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x)\right)\\&=\frac{1}{1-x}(-\ln(1-x))\quad(|x|<1)\end{aligned}$$

故幂级数的和函数为$\frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

例 7.33(江苏省 2006 年竞赛题)　(1) 设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2x^n$的收敛域为$[-1,1]$,求证:幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n$的收敛域也为$[-1,1]$.

(2) 试问命题(1)的逆命题是否正确?若正确,给出证明;若不正确,举一反例说明.

解析　(1) 因$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,而$\left|\frac{a_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$,由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$收敛,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n$在$x=\pm 1$时(绝对)收敛.下面证明:$\forall\ x_0$,$|x_0|>1$,

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n$ 发散.(反证法)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n$ 收敛,则对 $\forall r$,只要 $|r|<|x|$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}r^n\right|$ 收敛,取 r_1 使得 $1<|r_1|<|r|<|x|$. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}n\left|\frac{r_1}{r}\right|^n=0$. 所以 n 充分大时,$|a_n|<1$,$n\left|\frac{r_1}{r}\right|^n<1$. 于是

$$|a_n^2r_1^n|=\left|\frac{a_n}{n}r^n\right||a_n|n\left|\frac{r_1}{r}\right|^n\leqslant\left|\frac{a_n}{n}r^n\right|$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2r_1^n$ 收敛,此与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2x^n$ 在 $|x|>1$ 时发散矛盾. 所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n$ 的收敛域为$[-1,1]$.

(2) 命题(1)的逆命题不成立. 反例 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}x^n$,其收敛域为$[-1,1]$. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的收敛域为$[-1,1)$.

例 7.34(江苏省 1994 年竞赛题)　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n}$ 的和函数为________.

解析　令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}$,逐项求积分得

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)^n=\frac{1}{x}\frac{x^2/3}{1-x^2/3}=\frac{x}{3-x^2}$$

两边求导得

$$f(x)=\frac{3-x^2-x\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$$

故原式 $=x^2f(x)=\frac{x^2(3+x^2)}{(3-x^2)^2}$.

例 7.35(江苏省 2006 年竞赛题)　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(x+1)^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解析　令 $t=\frac{(x+1)^2}{2}$,则

$$\text{原式}=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n \tag{*}$$

设 $a_n=n$,因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$,故收敛半径 $R=1$. $t=1$ 时(*)式发散,故(*)式的收敛域为$[0,1)$. 由此可解得原级数的收敛域为$(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$,且

$$\text{原式}=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'$$

$$=\frac{t}{(1-t)^2}=\frac{2(x+1)^2}{(1-2x-x^2)^2}$$

例 7.36(北京市 2001 年竞赛题)　求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$的收敛区间与和函数.

解析　令$a_n=\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)^3}=+\infty$$

于是,原级数的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

因为

$$\begin{aligned}\frac{n^3}{(n+1)!}&=\frac{n^3+1-1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\\&=\frac{n(n-1)+1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}(-x)^n\\&=-\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)!}\\&=-\frac{x}{2}+(-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\\&=-\frac{x}{2}+x^2e^{-x}+(e^{-x}-1+x)+\frac{1}{x}\left(e^{-x}-1+x-\frac{1}{2}x^2\right)\\&=e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)\end{aligned}$$

综上所述,和函数$S(x)=\begin{cases}e^{-x}\left(x^2+1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

例 7.37(南京大学 1993 年竞赛题)　幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$的和函数为________,收敛域为________.

解析　首先令$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$,$|x|<1$. 逐项求积分两次得

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n,\quad |x|<1$$

$$\int_0^x\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x},\quad |x|<1$$

两边求导数两次得

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, \quad |x|<1$$

$$f(x) = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x|<1$$

于是原级数的和函数为 $xf(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$，收敛域为$(-1,1)$.

例 7.38(南京工业大学 2009 年竞赛题)　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 在$(-1,1)$上的和函数为____________.

解析　令 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$，逐项求导得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x), \quad |x|<1$$

积分得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x [-\ln(1-x)]\mathrm{d}x = -x\ln(1-x)\Big|_0^x + \int_0^x \frac{x}{x-1}\mathrm{d}x \\ &= -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x) = (1-x)\ln(1-x) + x \end{aligned}$$

例 7.39(江苏省 1998 年竞赛题)　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域与和函数.

解析　因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - x\right) \\ &= \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1 = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x) \end{aligned}$$

又因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域为$(-1,1)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}x^n$ 的收敛域为$[-1,1)$，取它们的交集为$(-1,1)$，于是和函数与收敛域为

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x}\ln(1-x), & -1<x<0 \text{ 或 } 0<x<1, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

例 7.40(南京大学 1995 年竞赛题)　求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$ $(|x|<1)$ 的和函数.

解析　因为

$$\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{x^{2^n}+1-1}{(x^{2^n}+1)(x^{2^n}-1)}=\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}$$

所以原级数的部分和函数为

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2^k}}{x^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{x^{2^k}-1}-\frac{1}{x^{2^{k+1}}-1}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}$$

由于 $|x|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right]=\frac{1}{x-1}+1=\frac{x}{x-1},\quad |x|<1$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{x}{x-1},\quad |x|<1$$

例 7.41（北京市 1990 年竞赛题）　对 p 讨论幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln n}$ 的收敛区间.

解析　令 $a_n=\frac{1}{n^p\ln n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p\ln(n+1)}{n^p\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=1$$

所以幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $p<0$ 时，$a_n\not\to 0(n\to\infty)$，所以幂级数在 $x=\pm1$ 处发散. 因此，$p<0$ 时，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $0\leqslant p<1$ 时，若 $x=1$，原幂级数为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{\ln n}=+\infty$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$ 发散；若 $x=-1$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p\ln n}$ 是莱布尼兹型级数，故收敛. 因此 $0\leqslant p<1$ 时，收敛区间为 $[-1,1)$.

当 $p=1$ 时，若 $x=1$，原级数化为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$，由积分判别法知发散；若 $x=-1$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ 为莱布尼兹型级数，故收敛. 因此 $p=1$ 时，收敛区间为 $[-1,1)$.

当 $p>1$ 时，若 $x=1$，$\frac{1}{n^p\ln n}<\frac{1}{n^p}(n\geqslant 3)$，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$ 收敛；若 $x=-1$，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\ln n}$ 绝对收敛. 因此 $p>1$ 时，收敛区间为

$[-1,1]$.

综上可知，$p<0$ 时，收敛区间为 $(-1,1)$；$0\leqslant p\leqslant 1$ 时，收敛区间为 $[-1,1)$；$p>1$ 时，收敛区间为 $[-1,1]$.

例 7.42(北京市 2004 年竞赛题)　设

$$a_0=1,\quad a_1=-2,\quad a_2=\frac{7}{2},\quad a_{n+1}=-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n\quad (n\geqslant 2)$$

证明当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数 $S(x)$.

解析　因为 $a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n$，所以 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=-\dfrac{n+1}{n+2}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n+1}{n+2}\right|=1$$

所以幂级数的收敛半径 $R=1$，故当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

由 $a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n(n\geqslant 2)$，即 $a_n=-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}(n\geqslant 3)$，于是

$$\begin{aligned}a_n&=-\frac{n+1}{n}\cdot\left(-\frac{n}{n-1}\right)a_{n-2}=(-1)^2\frac{n+1}{n-1}a_{n-2}=\cdots\\&=(-1)^{n-2}\frac{n+1}{3}\cdot a_2=(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)\quad (n\geqslant 3)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}S(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^n\\&=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{6}(n+1)x^n\end{aligned}$$

考虑 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=f(x)$，逐项积分得

$$\int_0^x[-f(x)]\mathrm{d}x=\sum_{n=3}^{\infty}(-x)^{n+1}=\frac{x^4}{1+x}$$

两边求导数得 $f(x)=-\left(\dfrac{x^4}{1+x}\right)'=-\dfrac{4x^3+3x^4}{(1+x)^2}$，所以

$$S(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right),\quad |x|<1$$

例 7.43(浙江省 2002 年竞赛题)　设 $a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n,n\geqslant 1$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径、收敛域及和函数.

解析　由于 $a_{n+2}+a_{n+1}=3(a_{n+1}+a_n)$，令 $b_n=a_{n+1}+a_n$，则

$$b_{n+1}=3b_n=3^2b_{n-1}=\cdots=3^nb_1=3^n\cdot 2$$

考察

$$\begin{aligned}&b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n\\=&(a_2+a_1)-(a_3+a_2)+(a_4+a_3)-\cdots+(-1)^{n-1}(a_{n+1}+a_n)\\=&a_1+(-1)^{n+1}a_{n+1}=1+(-1)^{n+1}a_{n+1}\\=&2\cdot(3^0-3+3^2-3^3+\cdots+(-1)^{n+1}3^{n-1})\\=&2\cdot(1-3+3^2-3^3+\cdots+(-3)^{n-1})\\=&2\cdot\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}=\frac{1}{2}(1-(-3)^n)\end{aligned}$$

由此可得 $a_{n+1}=(-1)^n\cdot\frac{1}{2}+3^n\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}+3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}3^{n-1}x^n\\&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^n\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-x}{1-(-x)}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3x}{1-3x}=\frac{x(1-x)}{(1+x)(1-3x)}\end{aligned}$$

其中 $|x|<1$ 且 $|3x|<1$，故所求级数收敛半径为 $R=\frac{1}{3}$，收敛域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，和函数为 $\frac{x(1-x)}{(1+x)(1-3x)}$.

例 7.44（北京市 1995 年竞赛题）　已知 $a_1=1,a_2=1,a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，试求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径与和函数.

解析　令 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$，则 $b_1=1,b_2=\frac{1}{2},b_{n+1}=\frac{1}{1+b_n}$. 假设 $\{b_n\}$ 收敛，令 $b_n\to A(n\to\infty)$，则 $A=\frac{1}{1+A}\Rightarrow A^2+A-1=0\Rightarrow A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，由于 $b_n>0$，故

$$A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

下面来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$. 由于 $1-A=A^2,0<A<1$，故有

$$\begin{aligned}|b_{n+1}-A|&=\left|\frac{1}{1+b_n}-A\right|=\frac{|1-A-Ab_n|}{1+b_n}\leqslant A|b_n-A|\\&\leqslant A^2|b_{n-1}-A|\leqslant\cdots\leqslant A^n|b_1-A|=A^n\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\end{aligned}$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}|b_n|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

令原级数的和函数为$S(x)$,由$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$可知$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,则$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,于是

$$a_nx^n=a_{n+2}x^n-a_{n+1}x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^n$$

$$S(x)=\frac{S(x)-a_1x-a_2x^2}{x^2}-\frac{S(x)-a_1x}{x}$$

可得

$$S(x)=\frac{x}{1-x-x^2}\quad\left(|x|<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

综上所述,收敛半径$R=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$,和函数为

$$S(x)=\frac{x}{1-x-x^2}\quad\left(|x|<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

例 7.45(精选题)　设a_n是曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$所围区域的面积,记$S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求$S_1$与$S_2$的值.

解析　根据题意有

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{2n-1}=\frac{1}{2n\cdot(2n+1)}$$

由于$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\sim\dfrac{1}{n^2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,所以级数$S_1$收敛;由于$a_{2n-1}=\dfrac{1}{2n\cdot(2n+1)}\sim\dfrac{1}{4n^2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2}$收敛,所以级数$S_2$收敛. 有

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

由于级数$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$显然是收敛的，所以加括号的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$也收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

由于$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-x)^n=-\ln(1+x)$，收敛域为$(-1,1]$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=-\ln(1+1)=-\ln2$，于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=1-\ln2$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=1-\ln2$$

7.2.4 求数项级数的和(例7.46—7.52)

例7.46(北京化工大学1991年竞赛题) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$$

解析 由于

$$k!+(k+1)!+(k+2)!=k![1+(k+1)+(k+1)(k+2)]=k!(k+2)^2$$

所以$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{1}{k!(k+2)}$. 考虑幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+2)}x^{k+2}$$

则$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k+1}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=xe^x$，于是

$$f(x)=f(0)+\int_0^x xe^x\mathrm{d}x=e^x(x-1)+1,\quad |x|<+\infty$$

令$x=1$，得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+2)}-\frac{1}{2}$$

$$=f(1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

例 7.47(江苏省 2002 年竞赛题)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}\right)$的和.

解析　首先考虑幂级数为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\quad(|x|<1)$$

逐项积分得

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\quad(|x|<1)$$

令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(|x|<1)$,逐项积分得

$$\int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\quad(|x|<1)$$

两边求导得

$$g(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(|x|<1)$$

于是

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=xg(x)=\frac{x}{(1-x)^2}\quad(|x|<1)$$

两边求导得

$$f(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1)$$

所以

$$\text{原式}=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=6$$

例 7.48(莫斯科电子技术学院 1977 年竞赛题)　求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$的和.

解析　$\text{原式}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}-1$

令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $|x|<1$,逐项求积分得

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad |x|<1$$

两边求导得 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$|x|<1$. 令 $x=\dfrac{1}{2}$ 得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^n}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4$$

故原式 $=4-1=3$.

例 7.49(精选题)　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)3^n}$.

解析　令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n},\quad |x|\leqslant 1$$

两次逐项求导得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad |x|<1$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},\quad |x|<1 \tag{1}$$

(1) 式两边积分得

$$f'(x)=f'(0)+\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x,\quad |x|<1 \tag{2}$$

(2) 式两边积分得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x\Big|_0^x-\int_0^x\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\quad |x|<1$$

于是

$$\text{原式}=2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\ln\frac{4}{3}=\frac{\pi}{9}\sqrt{3}-2\ln 2+\ln 3$$

例 7.50(江苏省 2012 年竞赛题)　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(n+1)+(-1)^n}{2^n n}$ 的和.

解析　原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，现令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$$

于是

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\int_0^x\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x},\quad |x|<1$$

因此

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3},\quad |x|<1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}=16,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=8$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{3}{2}$$

故原式 $=8-\ln\frac{3}{2}$.

例 7.51(莫斯科全苏大学生 1975 年竞赛题) 试求$\dfrac{1+\dfrac{\pi^4}{5!}+\dfrac{\pi^8}{9!}+\dfrac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\dfrac{1}{3!}+\dfrac{\pi^4}{7!}+\dfrac{\pi^8}{11!}+\dfrac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$.

解析 记 $p=1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots,q=\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots$,则

$$\pi p-\pi^3q=\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\frac{\pi^9}{9!}-\cdots$$

由于 $\sin x$ 的幂级数展开式为

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\cdots$$

所以 $\pi p-\pi^3q=\sin\pi=0$,即原式 $=\frac{p}{q}=\pi^2$.

例 7.52(莫斯科钢铁与合金学院 1977 年竞赛题) 证明:当 $p\geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p$$

解析 令 $x_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}$,于是

$$x_n=n^{1-\frac{1}{p}}\frac{1}{n(n+1)}=n^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=n^{1-\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^p-\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)^p\right)$$

由拉格朗日中值定理,存在 $\theta\in(0,1)$,使得

$$\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^p-\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)^p=p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+\theta}}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)$$

于是

$$x_n=\left(\frac{n}{n+\theta}\right)^{1-\frac{1}{p}}p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)\leqslant p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{2n}}\right)=1$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p$$

7.2.5　求初等函数关于 x 的幂级数展开式(例 7.53—7.58)

例 7.53(江苏省 1991 年竞赛题)　函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 关于 x 的幂级数展开式为________，该幂级数的收敛域为________.

解析　因为 $\ln(1-u)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}u^n,\ -1\leqslant u<1$，所以

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n$$

收敛域为 $-1<x\leqslant 1$ 与 $-1\leqslant 2x<1$ 的交集，即$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

例 7.54(江苏省 2000 年竞赛题)　将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数，并指明收敛域.

解析　首先求 $f'(x)$ 的幂级数展开式，有

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

这里 $|x|<1$. 逐项求积分得

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1\leqslant x<1$$

因 $f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，所以

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1\leqslant x<1$$

例 7.55(南京大学 1993 年竞赛题)　函数 $f(x)=\arctan\frac{x+3}{x-3}$ 关于 x 的幂级

数展开式中 x^3 的系数为________,收敛半径为________.

解析 由于 $|x|<3$ 时

$$f'(x)=\left(\arctan\frac{x+3}{x-3}\right)'=\frac{-3}{9+x^2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{3^2}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3\cdot 9^n}x^{2n}$$

逐项积分得

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3\cdot 9^n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

于是 x^3 的系数($n=1$ 时)为$\frac{1}{81}$,收敛半径为 3.

例 7.56(南京大学 1995 年竞赛题) 试将函数$\frac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$展为马克劳林级数,并写出其收敛域.

解析 因为

$$f(x)=\frac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{2x+5}$$

下面分别将 $g(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$, $h(x)=\frac{1}{2x+5}$ 展为幂级数. 因为

$$\int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{(x-3)^2}\mathrm{d}x=\frac{-1}{x-3}\Big|_0^x=\frac{x}{3(3-x)}$$

$$=\frac{x}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+2}}x^{n+1},\quad |x|<3$$

两边求导得

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{3^{n+2}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}x^n,\quad |x|<3$$

又因为

$$h(x)=\frac{1}{2x+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{2}{5}x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}x^n,\quad |x|<\frac{5}{2}$$

所以 $f(x)$ 的幂级数展式为

$$f(x)=g(x)+h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}\right)x^n$$

其收敛域为 $|x|<3$ 与 $|x|<\frac{5}{2}$ 的交集，即 $|x|<\frac{5}{2}$.

例 7.57（江苏省 2008 年竞赛题）　求 $f(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3(1-3x)}$ 关于 x 的幂级数展开式，指出其收敛域.

解析　因

$$f(x)=\frac{(x^3-3x^2+3x-1)+(1-3x)}{(x-1)^3(1-3x)}=\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{(x-1)^3}$$

又

$$\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^n,\quad |x|<\frac{1}{3}$$

令 $g(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$，则

$$\int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{(x-1)^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\bigg|_0^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

令 $h(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$，则

$$\int_0^x h(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1},\quad |x|<1$$

$$\Rightarrow\qquad h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\quad |x|<1$$

$$\Rightarrow\qquad \int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)x^n,\quad |x|<1$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n,\quad |x|<1$$

故

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[3^n-\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]x^n,\quad |x|<\frac{1}{3}$$

例 7.58（精选题）　将幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!2^{2n}}x^{2n+1}$$

的和函数展为 $x-1$ 的幂级数.

解析　应用函数 $\sin x$ 的马克劳林展式得原级数的和函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!2^{2n}}x^{2n+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=2\sin\frac{x}{2}$$

令 $x-1=t$,应用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的马克劳林展式,则

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}&=2\sin\frac{1+t}{2}=2\sin\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}+2\cos\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\\&=2\sin\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}+2\cos\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\left[\frac{\sin\frac{1}{2}}{2^{2n}(2n)!}(x-1)^{2n}+\frac{\cos\frac{1}{2}}{2^{2n+1}(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}\right],\\&\qquad |x|<+\infty\end{aligned}$$

7.2.6 求函数的傅氏级数展开式(例 7.59)

例 7.59(江苏省 1994 年竞赛题) 将函数 $f(x)=\frac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数,并求 $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots$ 的和.

解析 将 $f(x)$ 作奇延拓,则 $f(x)$ 为奇函数,$f(x)\cos nx$ 为奇函数,$f(x)\sin nx$ 为偶函数. 应用奇、偶函数在对称区间上定积分的性质,求得傅氏系数中

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

而

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{2n\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}\cos nx\\&=\frac{-1}{2n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2n}(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 的正弦级数为

$$f(x)\sim\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

取 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $I=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$,于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots\\&=I+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots=I+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)\\&=I+\frac{1}{3}I=\frac{4}{3}I=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

练习题七

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项 u_n 与其部分和 S_n 满足方程

$$2S_n^2 = 2u_nS_n - u_n \quad (n \geqslant 2)$$

求证级数收敛并求其和.

2. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{2n^3-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{\pi}{3^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)$；

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}\right)$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$.

3. 判别级数 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$ 的敛散性.

4. 判别下列级数是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.

5. 就常数 p 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^p}$ 何时绝对收敛、何时条件收敛、何时发散.

6. 就常数 p 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 何时绝对收敛、何时条件收敛、何时发散.

7. 设 $\alpha > 1$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$ 收敛.

8. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

9. 设 α 为正实数，讨论级数 $1-\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^\alpha}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6^\alpha}+\cdots$ 的敛散性.

10. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+b^n}x^n(a>0,b>0)$的收敛域.

11. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$的收敛域.

12. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n!}{2^n(n-1)!}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

13. 求下列函数关于x的幂级数展开式，并指出收敛域：

(1) $\ln\frac{1+x}{2-x}$；　　(2) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

专题 8　微分方程

8.1　基本概念与内容提要

8.1.1　微分方程的基本概念

1）微分方程的阶、微分方程的初值问题、微分方程的通解与特解

2）线性与非线性微分方程

一阶线性方程的标准形式是

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

二阶线性方程的标准形式是

$$y'' + P(x)y' + G(x)y = f(x)$$

线性方程的特征是关于未知函数以及它的各阶导数是一次方程，其系数与非齐次项（即上述方程的右端项）是自变量的已知函数. 上述两个方程是关于 y 的一阶与二阶线性方程. 当两个方程右端的非齐次项 $Q(x)$ 与 $f(x)$ 恒等于零时，称为线性齐次方程，否则称为线性非齐次方程.

8.1.2　一阶微分方程

1）变量可分离的方程总可化为

$$P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0$$

的形式，两边积分即得隐函数形式的通解

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C$$

这里左端的两个不定积分只求一个原函数.

2）齐次方程：齐次方程总可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式. 作未知函数的变换 $y = xu$，这里 u 为新的未知函数，则原方程化为变量可分离的方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

设该方程的通解为 $u=\varphi(x,c)$，则原方程的通解为 $y=x\varphi(x,c)$.

3）一阶线性方程：一阶线性方程

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

的通解可用公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(c+\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

直接写出. 这里的三个积分皆取一个原函数. 这个通解公式中，$c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是原微分方程所对应的齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解，而另一项

$$\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

是原方程的一个特解.

4）伯努利方程：方程的形式为

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\lambda}$$

这里 $\lambda\neq 0,1$. 作未知函数的变换，令 $y^{1-\lambda}=u$，且原方程可化为一阶线性非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(1-\lambda)P(x)u=(1-\lambda)Q(x)$$

8.1.3　二阶微分方程

1）用降阶法解特殊的二阶微分方程

(1) $y''=f(x)$：积分两次即得通解

$$y=\int\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+c_1x+c_2$$

(2) $y''=f(x,y')$：令 $y'=u$，则原方程化为一阶方程 $u'=f(x,u)$.

(3) $y''=f(y,y')$：令 $y'=u$，$y''=u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，则原方程化为一阶方程

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=f(y,u)$$

2）二阶线性微分方程通解的结构

二阶线性微分方程的标准形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{1}$$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{2}$$

称方程(2)为方程(1)所对应的齐次方程，称方程(2)的通解为方程(1)的余函数.

定理1　设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(2)的两个线性无关解，则方程(2)的通解为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

这里 c_1 与 c_2 为两个任意常数.

定理 2　设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(2) 的两个线线无关解,$\tilde{y}(x)$ 是方程(1) 的任一特解,则方程(1) 的通解为

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)$$

定理 3　设方程(1) 中 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. 若方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

分别有特解 $\tilde{y}_1(x)$ 与 $\tilde{y}_2(x)$,则方程(1) 有特解 $\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$.

定理 4　方程(1) 的任意两个特解的差是方程(2) 的一个特解;方程(1) 的任意两个特解的平均值仍是方程(1) 的一个特解.

3) 二阶常系数线性齐次方程的通解公式:二阶常系数线性齐次方程

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3}$$

的特征方程为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{4}$$

当 $p^2 - 4q > 0$ 时,方程(4) 有两个相异实根 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$,此时方程(3) 的通解为

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

当 $p^2 - 4q = 0$ 时,方程(4) 有两个相等的实根 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 = \lambda_2)$,此时方程(3) 的通解为

$$y = e^{\lambda_1 x}(c_1 x + c_2)$$

当 $p^2 - 4q < 0$ 时,方程(4) 有两个共轭复根 $\lambda_1 = \alpha + \beta \mathrm{i}, \lambda_2 = \alpha - \beta \mathrm{i}$,其中 $\alpha = \frac{-p}{2}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$,此时方程(3) 的通解为

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

4) 二阶常系数线性非齐次方程的特解

设方程

$$y'' + py + qy = f(x) \tag{5}$$

当右端的函数 $f(x)$ 为指数函数 $e^{\alpha x}$、多项式 $P_n(x)$、三角函数 $a\cos\beta x + b\sin\beta x$ 或者它们的乘积时,可用待定系数法求方程(5) 的一个特解 $\tilde{y}(x)$. 这里 $\tilde{y}(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的形式,或在此相同形式前乘以 $x^k (k = 0, 1, 2)$. 具体地说,当 α 或 $\alpha + \beta \mathrm{i}$ 不是特征根时,$k = 0$;当 $\lambda = 0$ 不是特征根时,$k = 0$;当 α 或 $\alpha + \beta \mathrm{i}$ 是单特征根时,$k = 1$;当 $\lambda = 0$ 是单特征根时,$k = 1$;当 α 是二重特征根时,$k = 2$.

5）欧拉方程：二阶欧拉方程的标准形式是

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x) \tag{6}$$

作自变量的变换，令 $x=e^t$，则

$$xy'=\frac{dy}{dt},\quad x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

代入方程(6) 化为常系数线性方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$$

8.1.4　微分方程的应用

1）求函数表达式：根据已知条件，运用微分知识，导出未知函数所满足的微分方程和初值条件，求解此初值问题即得所求的函数表达式.

2）在几何上常常需要求满足一定条件的曲线，这些条件通常与曲线的切线性质或曲线所围的面积有关. 我们用 $y=f(x)$ 表示所求曲线的方程，根据已知条件找出 x,y,y' 之间的关系式，这就是微分方程，然后求解此微分方程.

3）在物理上，常用 t 表示时间，用 x 表示某物理量，应用导数的物理意义（如速度、加速度等）以及有关的物理定律建立微分方程，然后再求解.

8.2　竞赛题与精选题解析

8.2.1　微分方程的特解(例 8.1—8.3)

例 8.1（江苏省 1991 年竞赛题）　已知微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 有特解 $y=\frac{x}{\ln|x|}$，则 $\varphi(x)=$ ______.

解析　因 $y'=\frac{\ln|x|-1}{(\ln|x|)^2}$，代入微分方程得

$$\frac{\ln|x|-1}{(\ln|x|)^2}=\frac{1}{\ln|x|}+\varphi(\ln|x|)$$

令 $\ln|x|=t$，得 $\varphi(t)=\frac{t-1}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{t-1-t}{t^2}=-\frac{1}{t^2}$，故 $\varphi(x)=-\frac{1}{x^2}$.

例 8.2（莫斯科大学 1977 年竞赛题）　是否存在闭区间$[-a,a]$上的连续函数 $p(x),q(x)$，使得 $y=x^2\sin x$ 是微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的特解？

解析　将 $y=x^2\sin x$ 代入微分方程得

$$(2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x)+p(x)(2x\sin x+x^2\cos x)+q(x)x^2\sin x=0$$

当 $x\neq 0$ 时，将上式整理得

$$2\frac{\sin x}{x}+4\cos x+[2p(x)-x+xq(x)]\sin x+xp(x)\cos x=0$$

令 $x\to 0$ 得 $2+4+0+0=0$，即 $6=0$，此为矛盾式. 故不存在连续函数 $p(x)$，$q(x)$ 使得 $y=x^2\sin x$ 为所给微分方程的解.

例 8.3（南京工业大学 2009 年竞赛题）　已知一阶线性方程 $y'+p(x)y=e^x$ 有特解 $y=xe^x$，则该微分方程的通解为__________.

解析　将特解 $y=xe^x$ 代入原方程可解得 $p(x)=-1$. $y'+y=0$ 的特征方程为 $\lambda-1=0$，故 $\lambda=1$. 于是原方程的余函数为 $y=ce^x$. 所以所求通解为

$$y=e^x(c+x).$$

8.2.2　变量可分离方程的应用题(例 8.4—8.8)

例 8.4（江苏省 1996 年竞赛题）　设曲线 C 经过点(0，1)，且位于 x 轴上方. 就数值而言，C 上任何两点之间的弧长都等于该弧以及它在 x 轴上的投影为边的曲边梯形的面积，求 C 的方程.

解析　设曲线方程为 $y=y(x)$，由题意得

$$\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^x y(x)dx,\quad y(0)=1$$

两边求导得

$$\sqrt{1+(y')^2}=y\Rightarrow 1+(y')^2=y^2\Rightarrow y'=\pm\sqrt{y^2-1}\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$$

于是

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+\ln|C|\Rightarrow y+\sqrt{y^2-1}=Ce^{\pm x}$$

由 $y(0)=1$，解得 $C=1$. 故 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}\Rightarrow\dfrac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}=e^{\pm x}$，所以

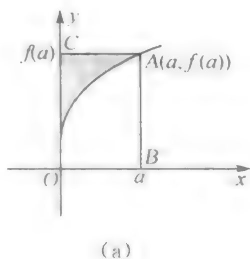
$$y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x},\quad y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x}$$

于是所求曲线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

例 8.5（南京大学 1995 年竞赛题）　已知曲线 $y=f(x)\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 连续且单调，现从其上任一点 A 作 x 轴与 y 轴的垂线，垂足分别是 B 和 C. 若由直线 AC，y 轴和曲线本身包围的图形的面积等于矩形 $OBAC$ 的面积的 $\dfrac{1}{3}$，求曲线的方程.

解析　(1) 当 $f(x)$ 单调增时（如图(a)所示），在曲线上任取点 $A(a,f(a))$，由

题意得



(a)

$$\int_0^a [f(a)-f(x)]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}af(a)$$

化简得

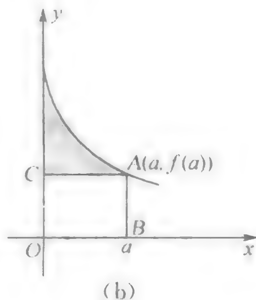
$$3\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2af(a)$$

两边对 a 求导得

$$3f(a) = 2f(a) + 2af'(a)$$

化简得$\frac{2\mathrm{d}f}{f} = \frac{\mathrm{d}a}{a}$. 积分得 $f(a) = C\sqrt{a}$. 于是所求曲线方程为 $y = C\sqrt{x}$(其中 C 为任意正常数).

(2) 当 $f(x)$ 单调减时(如图(b) 所示),在曲线上任取点 $A(a, f(a))$. 由题意得



(b)

$$\int_0^a [f(x)-f(a)]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}af(a)$$

化简得

$$3\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 4af(a)$$

再两边对 a 求导得 $4\frac{\mathrm{d}f}{f} = -\frac{\mathrm{d}a}{a}$. 积分得 $f(a) = \frac{C}{\sqrt[4]{a}}$. 于是所求曲线方程为

$$y = \frac{C}{\sqrt[4]{x}} \quad (C\text{ 为任意正常数})$$

例 8.6(莫斯科动力学院 1975 年竞赛题)　求满足函数方程

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

的可微函数 $f(x)$.

解析　由于 $y=0$ 时

$$f(x) = \frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)} \Rightarrow f(0)[1+f^2(x)] = 0$$

所以 $f(0)=0$. 又因为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)-f(0)}{y} \cdot \frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(y)}$$

两边令 $y \to 0$ 得

$$f'(x) = f'(0)[1+f^2(x)]$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)\mathrm{d}x$$

积分得

$$\arctan f(x)=f'(0)x+C_1$$

令 $x=0$ 代入得 $C_1=0$,于是所求函数为 $f(x)=\tan(Cx)$.

例 8.7(北京市 1995 年竞赛题)　(1) 求微分方程 $y'+\sin(x-y)=\sin(x+y)$ 的通解;(2) 求可微函数 $f(t)$,使之满足 $f(t)=\cos 2t+\int_0^t f(u)\sin u\mathrm{d}u$.

解析　(1) 应用三角公式,原方程等价于

$$y'+\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

即 $y'=2\cos x\cdot\sin y$,此为变量可分离的方程,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sin y}=2\cos x\mathrm{d}x$$

两边积分得 $\ln|\csc y-\cot y|=2\sin x+C_1$,即通解为

$$\csc y-\cot y=Ce^{2\sin x}$$

(2) 等式两端对 t 求导,得

$$f'(t)-\sin t\cdot f(t)=-2\sin 2t$$

此为一阶线性微分方程,通解为

$$\begin{aligned}f(t)&=e^{\int\sin t\mathrm{d}t}\left(C-\int 2\sin 2t\cdot e^{-\int\sin t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)\\&=e^{-\cos t}\left(C-2\int\sin 2t\cdot e^{\cos t}\mathrm{d}t\right)=4(\cos t-1)+Ce^{-\cos t}\end{aligned}$$

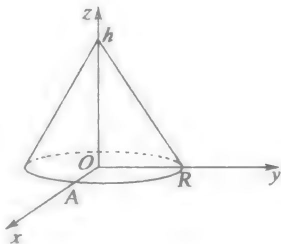
例 8.8(精选题)　设有底面圆半径为 R,高为 h 的正圆锥($h>R$),圆锥面上有一曲线 Γ,已知 Γ 过底面圆周上的一点,Γ 上每一点的切线与正圆锥面的轴线的夹角为 $\frac{\pi}{4}$,求曲线 Γ 的方程.

解析　设圆锥是由 yz 平面上的直线

$$\frac{y}{R}+\frac{z}{h}=1$$

绕 z 轴旋转而得.该圆锥的方程为

$$z=h\cdot\left(1-\frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$



设曲线 Γ 的起点为 $A(R,0,0)$,曲线 Γ 的参数方程为

$$x=\rho(\theta)\cos\theta,\quad y=\rho(\theta)\sin\theta,\quad z=h\left(1-\frac{1}{R}\rho(\theta)\right)$$

这里 $\rho=\rho(\theta)$ 为待求函数. 曲线 Γ 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\left(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta,\ \rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta,\ -\frac{h}{R}\rho'(\theta)\right)$$

故 $|\boldsymbol{\tau}|=\sqrt{(\rho'(\theta))^2+\rho^2(\theta)+\frac{h^2}{R^2}(\rho'(\theta))^2}$. 圆锥的轴线为 z 轴,取 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,由题意有

$$\boldsymbol{\tau}^\circ\cdot\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\cdot\boldsymbol{k}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

上式化简得

$$-\frac{h}{R}\rho'=\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{\tau}|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{R^2+h^2}{R^2}(\rho')^2+\rho^2}$$

$$\rho'(\theta)=-\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\rho(\theta)$$

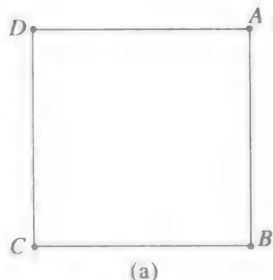
于是

$$\rho(\theta)=C\exp\left(-\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\cdot\theta\right)$$

由于 $\theta=0$ 时 $\rho=R$,所以 $C=R$,即 $\rho(\theta)=R\exp\left(-\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta\right)$. 故所求曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=R\exp\left(-\dfrac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta\right)\cdot\cos\theta,\\ y=R\exp\left(-\dfrac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta\right)\cdot\sin\theta,\quad(0\leqslant\theta<+\infty)\\ z=h\left(1-\exp\left(-\dfrac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta\right)\right)\end{cases}$$

8.2.3 齐次微分方程的应用题(例 8.9)

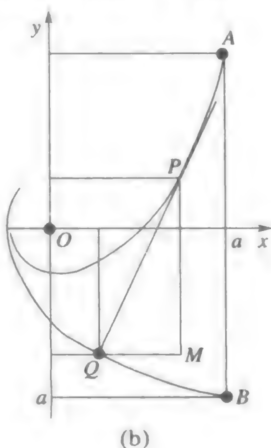


(a)

例 8.9(清华大学 1985 年竞赛题) 已知 A,B,C,D 四个动点开始分别位于一个四边形的四个顶点(如图(a)),然后点 A 向着点 B、点 B 向着点 C、点 C 向着点 D、点 D 向着点 A 同时以相同的速率运动,求每一点运动的轨迹,并画出运动轨迹的大致图形.

解析 建立如图(b)所示坐标系,坐标原点在正方形

的中心，点 A，B，C，D 的坐标别为 (a,a)，$(a,-a)$，$(-a,-a)$，$(-a,a)$. 下面先考虑点 A 的运动. 设经过时刻 t，点 A 运动到 $P(x,y)$，则点 B 运动到 $Q(y,-x)$，作 PM 垂直于 x 轴，QM 垂直于 y 轴，PM 与 QM 相交于 M. 于是



(b)

$$y' = \tan\angle PQM = \frac{PM}{QM} = \frac{x+y}{x-y}, \quad y(a) = a$$

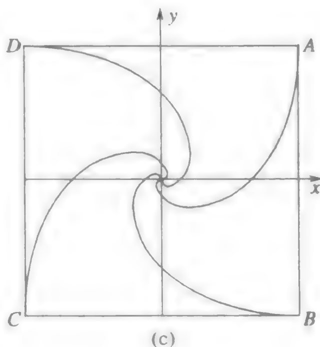
这是奇次方程，令 $y = xu$，方程化为

$$\frac{(1-u)\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad u(a) = 1$$

解得 $2\arctan\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2} + \ln\dfrac{x^2+y^2}{2a^2}$，这就是点 A 运动的轨迹，化为极坐标方程为

$$\rho = \sqrt{2}ae^{\theta-\frac{\pi}{4}}, \quad \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

此为对数螺线. 图形如右图(c) 所示. 点 B，C，D 运动轨迹的极坐标方程分别为



(c)

$$B:\ \rho = \sqrt{2}ae^{\theta+\frac{\pi}{4}}, \quad \theta \leqslant -\frac{\pi}{4}$$

$$C:\ \rho = \sqrt{2}ae^{\theta+\frac{3\pi}{4}}, \quad \theta \leqslant -\frac{3\pi}{4}$$

$$D:\ \rho = \sqrt{2}ae^{\theta+\frac{5\pi}{4}}, \quad \theta \leqslant -\frac{5\pi}{4}$$

其图形由对称性可画出(如图(c) 所示).

8.2.4　一阶线性微分方程的应用题(例 8.10—8.12)

例 8.10(全国大学生 2013 年决赛题)　设函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f'_u(u,v) + f'_v(u,v) = uv$，求 $y(x) = e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解.

解析　由于

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2e^{-2x}f(x,x) + e^{-2x}(f'_u(x,x)\cdot 1 + f'_v(x,x)\cdot 1) \\ &= -2y(x) + x^2e^{-2x} \end{aligned}$$

所以 $y(x)$ 所满足的一阶微分方程是 $y' + 2y = x^2e^{-2x}$，其通解为

$$y = e^{\int -2\mathrm{d}x}\left(C + \int x^2e^{-2x}e^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = e^{-2x}\left(C + \int x^2\mathrm{d}x\right) = e^{-2x}\left(C + \frac{1}{3}x^3\right)$$

例 8.11(江苏省 2000 年竞赛题)　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满

足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4$$

求 $f(x)$.

解析 采用极坐标将二重积分化为定积分，有

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho^3f(\rho)\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t\rho^3f(\rho)\mathrm{d}\rho$$

代入原式得

$$f(t)=4\pi\int_0^t\rho^3f(\rho)\mathrm{d}\rho+t^4$$

两边求导数得

$$f'(t)=4\pi t^3f(t)+4t^3,\quad f(0)=0$$

此为一阶线性微分方程，其通解为

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathrm{e}^{4\pi\int t^3\mathrm{d}t}\left(C+\int4t^3\cdot\mathrm{e}^{-4\pi\int t^3\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)=\mathrm{e}^{\pi t^4}\left(C+\int4t^3\cdot\mathrm{e}^{-\pi t^4}\mathrm{d}t\right)\\&=C\mathrm{e}^{\pi t^4}-\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=\dfrac{1}{\pi}$，于是 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi x^4}-1)$.

例 8.12（江苏省 1994 年竞赛题） 设 $f(x)$ 为定义在$[0,+\infty)$上的连续函数，且满足

$$f(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}V+t^3$$

求 $f(1)$.

解析 首先应用球坐标计算三重积分，记 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^tf(r)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=4\pi\int_0^tr^2f(r)\mathrm{d}r$$

代入原式得

$$f(t)=4\pi\int_0^tr^2f(r)\mathrm{d}r+t^3$$

则 $f(0)=0$. 上式两边求导得 $f'(t)=4\pi t^2f(t)+3t^2$，此为一阶线性方程，通解为

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathrm{e}^{\int4\pi t^2\mathrm{d}t}\left(C+\int3t^2\mathrm{e}^{-\int4\pi t^2\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi t^3}\left(C+\int3t^2\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\pi t^3}\mathrm{d}t\right)\\&=C\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi t^3}-\frac{3}{4\pi}\end{aligned}$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=\dfrac{3}{4\pi}$，于是 $f(t)=\dfrac{3}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi t^3}-1\right)$，故 $f(1)=\dfrac{3}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi}-1\right)$.

8.2.5　求解二阶线性微分方程(例 8.13—8.20)

例 8.13(江苏省 1994 年竞赛题)　设四阶常系数线性齐次微分方程有一个解为 $y_1 = xe^x\cos 2x$,则通解为________.

解析　由特解 $y_1 = xe^x\cos 2x$,表明特征方程有二重特征根$\lambda = 1 \pm 2\mathrm{i}$,故特征方程为

$$(\lambda - 1 - 2\mathrm{i})^2(\lambda - 1 + 2\mathrm{i})^2 = 0$$

化简得$(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25 = 0$,于是得所求的微分方程为 $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 14y'' - 20y' + 25y = 0$,此方程的通解为

$$y = e^x[(C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x]$$

例 8.14(全国大学生 2009 年初赛题)　已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$,$y_2 = xe^x + e^{-x}$,$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次方程的三个解,试求此微分方程.

解析　设所求微分方程为 $L(D)y = y'' + py' + qy = f(x)$,令 $y = ay_1 + by_2 + cy_3$,由于

$$L(D)y = L(D)(ay_1 + by_2 + cy_3) = (a+b+c)f(x)$$

所以,若 $a+b+c=0$,则 $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ 是微分方程 $L(D)y = 0$ 的特解;若 $a+b+c=1$,则 $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ 是微分方程 $L(D)y = f(x)$ 的特解. 因为

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = (a+b+c)xe^x + (a+c)e^{2x} + (b-c)e^{-x}$$

令$\begin{cases} a+b+c=0, \\ a+c=1, \\ b-c=0, \end{cases}$ 解得$(a,b,c) = (2,-1,-1)$,则 $2y_1 - y_2 - y_3 = e^{2x}$ 是 $L(D)y = 0$ 的特解;令$\begin{cases} a+b+c=0, \\ a+c=0, \\ b-c=1, \end{cases}$ 解得$(a,b,c) = (1,0,-1)$,则 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 是 $L(D)y = 0$ 的特解;令$\begin{cases} a+b+c=1, \\ a+c=0, \\ b-c=0, \end{cases}$ 解得$(a,b,c) = (-1,1,1)$,则 $-y_1 + y_2 + y_3 = xe^x$ 是 $L(D)y = f(x)$ 的特解. 所以 $\lambda = 2, -1$ 是微分方程 $L(D)y = 0$ 的两个特征根,故所求微分方程为

$$L(D)y = y'' - y' - 2y = f(x)$$

将特解 $y = xe^x$ 代入上式得 $f(x) = e^x(1-2x)$,于是所求微分方程为

$$y'' - y' - 2y = e^x(1-2x)$$

例 8.15(北京邮电大学 1996 年竞赛题)　设 $u_0 = 0$,$u_1 = 1$,$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$,

$n=1,2,\cdots$. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. 试导出 $f(x)$ 满足的微分方程.

解析 已知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$，对 x 求导得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_n}{(n-1)!}x^{n-1}\\&=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{au_{n-1}+bu_{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}\\&=1+a\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+b\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}\\&=1+af(x)+b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n-1}}{n!}x^n\end{aligned}$$

再求导，得

$$\begin{aligned}f''(x)&=af'(x)+b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}\\&=af'(x)+b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}x^n=af'(x)+bf(x)\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 满足微分方程

$$\begin{cases}f''(x)-af'(x)-bf(x)=0,\\f(0)=0,f'(0)=1\end{cases}$$

例 8.16（精选题） 设二阶常系数线性非齐次方程

$$y''+ay'+by=(cx+d)e^{2x}$$

有特解 $y=2e^x+(x^2-1)e^{2x}$，不解方程写出通解（说明理由），并求出常数 a,b,c,d 的值.

解析 微分方程的通解具有形式

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\tilde{y}(x) \qquad (*)$$

这里 C_1,C_2 为任意常数，$y_1(x),y_2(x)$ 为对应的齐次微分方程的基本解组. $\tilde{y}(x)=(\alpha x+\beta)e^{2x}$，此时 $\lambda=2$ 不是特征根；或 $\tilde{y}(x)=x(\alpha x+\beta)e^{2x}$，此时 $\lambda=2$ 为单特征根. 由于

$$y=2e^x+(x^2-1)e^{2x}=2e^x-e^{2x}+x^2e^{2x}$$

此特解应为（$*$）中取定常数 C_1,C_2 而得. 分析可得 $y_1(x)=e^x$，$y_2(x)=e^{2x}$，$\tilde{y}(x)=x^2e^{2x}$. 因而 $\lambda=1,2$ 为特征根，故 $a=-(1+2)=-3$，$b=1\cdot2=2$. 原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x^2e^{2x}$$

将 $\tilde{y}(x)=x^2e^{2x}$ 代入 $y''-3y'+2y=(cx+d)e^{2x}$ 可得

$$e^{2x}(4x^2+8x+2)-3e^{2x}(2x^2+2x)+2x^2e^{2x}=(cx+d)e^{2x}$$

化简得 $2x+2=cx+d$，所以 $c=2, d=2$. 即有

$$a=-3,\quad b=2,\quad c=2,\quad d=2$$

例 8.17（南京大学 1993 年竞赛题）　设 $\varphi(x)=\cos x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u$，其中 $\varphi(u)$ 为连续函数，求 $\varphi(x)$.

解析　原式两边求导得

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=-\sin x-\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u-x\varphi(x)+x\varphi(x)\\&=-\sin x-\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{1}$$

再两边求导得

$$\varphi''(x)+\varphi(x)=-\cos x\tag{2}$$

其特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$，故方程(2)的通解为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{D^2+1}\cos x=C_1\cos x+C_2\sin x-\mathrm{Re}\,\frac{1}{D^2+1}e^{\mathrm{i}x}\\&=C_1\cos x+C_2\sin x-\mathrm{Re}\,\frac{1}{(D^2+1)'_{D=\mathrm{i}}}e^{\mathrm{i}x}x\\&=C_1\cos x+C_2\sin x+\mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{i}}{2}e^{\mathrm{i}x}x=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\sin x\end{aligned}$$

由原式和(1)式知 $\varphi(0)=1, \varphi'(0)=0$，代入上式得 $C_1=1, C_2=0$，故所求函数为

$$\varphi(x)=\cos x-\frac{1}{2}x\sin x$$

注　微分方程(2)的特解是用算子方法求的. 若用待定系数法，令

$$\tilde{\varphi}(x)=x(A_1\cos x+A_2\sin x)$$

代入方程(2)得 $A_1=0, A_2=-\frac{1}{2}$，故 $\tilde{\varphi}(x)=-\frac{1}{2}x\sin x$.

例 8.18（北京市 1993 年竞赛题）　设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续二阶偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$$

试求函数 u 的表达式.

解析　令 $t=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{x}{t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{t}-\frac{x^2}{t^3}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{x^2}{t^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{1}{t}-\frac{y^2}{t^3}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{y^2}{t^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}$$

代入原方程得$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}+u=t^2$.此为二阶线性常系数方程,解得其通解为

$$u=C_1\cos t+C_2\sin t+t^2-2$$

故所求函数u的表达式为

$$u(x,y)=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$$

其中C_1,C_2为任意常数.

例 8.19(全国大学生 2010 年初赛题) 设函数$y=f(x)$由参数方程

$$\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad(t>-1)$$

所确定,且$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$,其中$\psi(t)$具有二阶导数,曲线与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切,求函数$\psi(t)$.

解析 记$x=2t+t^2=\varphi(t)$,则$\varphi'(t)=2(1+t)$,$\varphi''(t)=2$.应用参数式函数的二阶导数公式得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}=\frac{2(1+t)\psi''-2\psi'}{8(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)}$$

化简上式得

$$\psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)$$

此为关于$\psi'(t)$的一阶线性方程,其通解为

$$\psi'(t)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}\left(C_1+\int 3(1+t)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)=(1+t)(C_1+3t)$$

又由题意可知$\psi'(1)=2t\mathrm{e}^{-t^4}\Big|_{t=1}=\frac{2}{\mathrm{e}}$,故$2(3+C_1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$,得$C_1=\frac{1}{\mathrm{e}}-3$.于是

$$\psi'(t)=3t^2+\frac{1}{\mathrm{e}}t+\frac{1}{\mathrm{e}}-3$$

积分得

$$\psi(t)=t^3+\frac{1}{2\mathrm{e}}t^2+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-3\right)t+C_2$$

又因 $\psi(1)=\frac{3}{2\mathrm{e}}$，代入上式可得 $C_2=2$，故有 $\psi(t)=t^3+\frac{1}{2\mathrm{e}}t^2+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-3\right)t+2$.

例 8.20（莫斯科电子技术学院 1975 年竞赛题）　用初等函数与不定积分表示 $y''-xy'-y=0$ 的通解.

解析　原微分方程可写为 $y''-(xy)'=0$，两边积分得 $y'-xy=C_1$，应用一阶线性非齐次微分方程求通解公式得

$$y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(C_2+\int C_1\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(C_2+C_1\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)$$

这里的不定积分只表示一个原函数.

8.2.6　求解可化为二阶线性微分方程的微分方程(例 8.21—8.22)

例 8.21（江苏省 1994 年竞赛题）　给定方程 $y''+(\sin y-x)(y')^3=0$.

(1) 证明 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\Big/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3$，并将方程化为以 x 为因变量，以 y 为自变量的形式；

(2) 求方程的通解.

解析　应用反函数求导法则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$，两边对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=-\frac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}$$

一起代入原微分方程得

$$-\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(\sin y-x)(y')^3\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+x=\sin y$$

特征方程为 $\lambda^2+1=0$，故 $\lambda=\pm\mathrm{i}$，对应的齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos y+C_2\sin y$$

令原方程的特解为 $\tilde{x}=y(A\cos y+B\sin y)$，则

$$\tilde{x}'=(A+By)\cos y+(B-Ay)\sin y$$
$$\tilde{x}''=(B+B-Ay)\cos y+(-A-A-By)\sin y$$

一起代入原微分方程得

$$(2B-Ay+Ay)\cos y+(-2A-By+By)\sin y=\sin y$$

比较系数得 $B=0$，$A=-\frac{1}{2}$，故 $\tilde{x}=-\frac{1}{2}y\cos y$，于是所求通解为

$$x=C_1\cos y+C_2\sin y-\frac{1}{2}y\cos y$$

例 8.22（精选题） 设 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上二阶连续可导，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上的最大值.

解析 令 $u=x^2+y^2$，则 $z=uf(u)$，$u'_x=2x$，$u'_y=2y$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=u'_xf(u)+uf'(u)u'_x=2x[f(u)+uf'(u)]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2[f(u)+uf'(u)]+2x[f'(u)u'_x+u'_xf'(u)+uf''(u)u'_x]\\&=2f(u)+2(5x^2+y^2)f'(u)+4x^2uf''(u)\end{aligned}\tag{1}$$

利用函数 z 中 x 与 y 的对称性，易得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(u)+2(5y^2+x^2)f'(u)+4y^2uf''(u)\tag{2}$$

将(1) 与(2) 式代入方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 可得

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0\tag{3}$$

(3) 式是二阶欧拉方程. 令 $u=e^t$，则

$$uf'(u)=\frac{df}{dt},\quad u^2f''(u)=\frac{d^2f}{dt^2}-\frac{df}{dt}$$

代入(3) 式得

$$\frac{d^2f}{dt^2}+2\frac{df}{dt}+f=0\tag{4}$$

其特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$，解得 $\lambda=-1,-1$. 于是方程(4) 的通解为

$$f=e^{-t}(C_1+C_2t)=\frac{1}{u}(C_1+C_2\ln u)$$

由 $f(1)=0$, $f'(1)=1$, 得 $C_1=0$, $C_2=1$,于是 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

由于 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, 令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_0=\mathrm{e}$, 且当 $1\leqslant x<\mathrm{e}$ 时 $f'(x)>0$,当 $x>\mathrm{e}$ 时 $f'(x)<0$,所以 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 为所求的最大值.

练习题八

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x-\sqrt{x^2+y^2}}\quad(y\neq 0)$;

(2) $(x^2+y^2+x)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$;

(3) $\left(1+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sin y+x(1+\cos y)=0$.

2. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,$G(x)$ 是$\dfrac{1}{f(x)}$ 的一个原函数,且 $F(x)G(x)=-1$,$f(0)=1$,求 $f(x)$.

3. 求满足$\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$ 的函数 $f(x)$.

4. 已知 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $f(0)=1$, 且 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}[2xa_n+(n+1)a_{n+1}]x^n=0$, 求 $f(x)$.

5. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数,函数 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$$

求函数 z.

6. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数,且 $f(1)=0$,$f'(1)=1$,若使得曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}}\left[x(f'(x))^2-2f'(x)\right]y\mathrm{d}x-xf'(x)\mathrm{d}y$$

与路线无关,求函数 $f(x)$.

7. 求微分方程 $y''-y=2x+\sin x+\mathrm{e}^{2x}\cos x$ 的通解.

8. 求二阶微分方程 $y''+y'-2y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ 的通解.

9. 已知方程$(x-1)y''-xy'+y=0$ 有特解 $y=\mathrm{e}^x$,求其通解.

练习题答案与提示

练习题一

1. C　2. $f(x)=x+x^3, z(x,y)=2x+(x+y)^3$
3. $f(x)=2k\pi+\arcsin\frac{9}{8}x(k\in\mathbf{Z})$ 或 $f(x)=(2k+1)\pi-\arcsin\frac{9}{8}x(k\in\mathbf{Z})$
4. 3　5. 1　6. $a=1, b=\frac{1}{3}$　7. (1) 0　(2) e　(3) $\frac{1}{6}$　(4) -6　(5) $\frac{7}{6}$
(6) $-\frac{e}{2}$　(7) $\exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\right)$　(8) -50　(9) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(10) 1　8. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
9. $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　10. $f(x)=\begin{cases}2, & 0<x<2;\\ x, & x\geqslant 2\end{cases}$　11. $a=0, b=1$　12. 定义域为 $(-1,+\infty)$，$x\neq 1$ 时连续，$x=1$ 时为第一类(跳跃型)间断点　13.(提示)应用零点定理与严格单调性　14.(提示)应用零点定理　15.(提示)应用零点定理与严格单调性　16.(提示)设 $f(x)=2^x-x^2-1$，由 $f(0)=f(1)$，$f(4)=-1$，$f(5)=6$，应用零点定理证明至少有三个实根，再用反证法证明只有三个实根

练习题二

1. 该命题不成立，反例如下：$f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$　2. A　3. D
4. $f'(x)=\begin{cases}3, & 0<x<\sqrt{3};\\ \text{不存在}, & x=\sqrt{3};\\ 3x^2, & \sqrt{3}<x<2\end{cases}$　5. $a=0, b=2$　6. $f'(1)=ab$
7. $f'(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{|x|}-\frac{|x|}{1+x^2}, & x\neq 0;\\ \frac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}$　8. (1) $\arcsin\frac{1}{4}$
(2) $-4\cot 2x\cdot\csc^2 2x$　(3) $f(x)\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
(4) $\frac{(1+y^2)e^y}{1-x(1+y^2)e^y}$　(5) $\frac{y-x}{y+x}$　(6) $\frac{|t|}{t}$　(7) $(1+2x)e^{2x}$　9. 0　10. $n=2$
11. $-4\cdot 6!$　12. $\frac{5^n}{2}\cos\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{11^n}{4}\cos\left(11x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

13. e^x（提示：应用导数的定义） 14. $\frac{2}{15}$ 15. $\frac{1}{3}$ 16.（提示）应用拉格朗日中值定理 17.（提示）应用柯西中值定理 18.（提示）综合应用拉格朗日中值定理和柯西中值定理 19.（提示）应用泰勒公式，$\forall x_0 \in (a,b)$，将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开，分别令 $x=a$，$x=b$ 对 $f'(x_0)$ 进行估值 20.（提示）先应用拉格朗日中值定理，再作辅助函数 $F(x)=x(f'(x)-1)$，应用罗尔定理 21.（提示）应用泰勒公式，先将 $F(x)=\int_3^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=3$ 处展开，再分别令 $x=2$，$x=4$，由 $F(4)-F(2)$ 可得 $\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式 22.（提示）应用马克劳林公式与零点定理证明 $f(x)$ 至少有一个零点，再应用导数的性质证明 $f(x)$ 严格减少 23.（提示）应用导数研究函数的单调性 24. 略 25.（1）$x=0, y=-\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}$ （2）$x=0, y=-x-3, y=x+3$

练习题三

1. $\frac{1}{3}(e^{3x}+2)$ 2. $5x-\frac{3}{2}x^2+2\ln|1-x|+C$ 3. $\cos x-2\frac{\sin x}{x}+C$

4. (1) $2\arctan\sqrt{1+x}+C$ (2) $\frac{1}{2}\ln^2\left(1-\frac{1}{x}\right)+C$ (3) $x\ln(\ln x)+C$

(4) $2(x-2)\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}}+C$ (5) $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

(6) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$ (7) $\frac{x-\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}+C$ (8) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C$

(9) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

(10) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x<0;\\ \frac{1}{2}x^2+C, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}+C, & 1<x\end{cases}$ 5. $x^2\sin x-2$ 6. (1) $\frac{1}{k+1}$ (2) $\frac{4}{e}$

(3) $\frac{2}{\pi}$ 7.（提示）对函数 $F(x)=f(x)+f(1-x)$ 在 $[a,b]$ 上应用定积分中值定理 8. 0 9. (1) $\begin{cases}\frac{1}{2}(a^2-b^2), & a<b\leqslant 0;\\ \frac{1}{2}(a^2+b^2), & a<0<b;\\ \frac{1}{2}(b^2-a^2), & 0\leqslant a<b\end{cases}$ (2) $\frac{59}{2}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) $\frac{1}{8}\pi\ln 2$

(5) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}\sin 1+\mathrm{e}\cos 1-1)$ (6) $\frac{3}{16}\pi$ (7) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$ (8) $\frac{2}{3}$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. 3
12.（提示）：令 $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，应用分部积分法 13.（提示）应用定积分的分部积分公式 14.（提示）对函数 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 分别在 $x=0$ 与 $x=1$ 处展为 2 阶泰勒公式，然后分别取 $x=1$ 与 $x=0$，将两式相减，最后应用介值定理
15.（提示）对函数 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 分别在 $x=a$ 与 $x=b$ 处展为 2 阶泰勒公式，然后二式都取 $x=\frac{b-a}{2}$，并将两式相减，最后应用介值定理 16.（提示）取辅助函数 $F(x)=\frac{1}{2}[f(a)+f(x)](x-a)-\frac{1}{12}k(x-a)^3-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中常数 k 使得 $F(b)=0$，然后两次应用罗尔定理 17.（提示）取辅助函数 $F(x)=x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t-\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2$，应用导数 $F'(x)\geqslant 0$ 研究单调性 18.（提示）令 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$，用数学归纳法证明 $0\leqslant f(x)\leqslant M\frac{x^n}{n!}\leqslant M\frac{b^n}{n!}(a\leqslant x\leqslant b)$，取极限即得

练习题四

1.（1）0 （2）e （3）1 （4）0 （5）$\frac{1}{4}$ （6）不存在 2. B 3. D 4. D 5. A 6. A 7. B 8. 不连续、可偏导、不可微 （提示：$\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to 0}}f(x,y)=0$，$\lim\limits_{\substack{y=-x+x^2\\x\to 0}}f(x,y)=-2$，$f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$） 9. 连续、可偏导、可微 （提示：$f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$）
10.（1）4，$\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$ （2）$y^2(1+xy)^{y-1}$，$z\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$ （3）$3x^2f-2yf'$，xf' （4）$\frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ （5）$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}+2z\mathrm{d}z$ （6）$(\varphi+x\varphi')f'_1+2(x+\varphi\varphi')f'_2$ （7）$2xy$，$2xy-x^2\sin(2x)$ （8）$\frac{-x}{y(1+x^2)\ln^2(xy)}+\frac{\ln(1+x^2)}{xy\ln^3(xy)}$ （9）f''，$f''(\varphi')^2+f'\varphi''$ （10）$f'(x+y)+y[f''(xy)+f''(x+y)]$
（11）$f''_{xx}+\frac{2}{\varphi'(y)}f''_{xy}+\frac{1}{(\varphi'(y))^2}f''_{yy}-\frac{\varphi''(y)}{(\varphi'(y))^3}f'_y$ （12）$\mathrm{e}^y[f(x)-f(x-y)]+$

$e^y f'(x-y)$　11. $g(x,y)=x-y$　12. $\dfrac{1}{ye^z+1}, -\dfrac{ye^z}{(ye^z+1)^3}$

13. $\dfrac{2x}{f'-2z}dx+\dfrac{y(2y-f)+zf'}{y(f'-2z)}dy$　14. $2xf'_1+2e^{2x}f'_2-2ze^x\dfrac{\varphi'_y}{\varphi'_z}f'_3$

15. $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$ 为极小值　16. $(9,3)$ 为极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$；$(-9,-3)$ 为极小值点，极小值为 $z(-9,-3)=-3$.　17. $\left(\dfrac{k}{a},\dfrac{k}{b},\dfrac{k}{c}\right)$，其中 $k=\dfrac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$　18. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}x+\dfrac{2}{\sqrt{b}}y+\dfrac{3}{\sqrt{c}}z=3$　(2) $a=1, b=\dfrac{1}{4}, c=\dfrac{1}{9}$

19. $f(-2,8)=-\dfrac{96}{7}$，为极小值

练习题五

1. (1) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{1}^{2}f(x,y)dx$

(2) $\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{\frac{1}{2}(1+y)}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{y^2}^{\frac{1}{2}(1+y)}f(x,y)dx$

(3) $\int_{-1}^{0}dy\int_{-1-\sqrt{1+y}}^{-1+\sqrt{1+y}}f(x,y)dx+\int_{0}^{3}dy\int_{y-2}^{-1+\sqrt{1+y}}f(x,y)dx$

(4) $\int_{0}^{2}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{2}^{4}dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx$

(5) $\int_{0}^{a}dx\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{a}f(x,y)dy+\int_{a}^{2a}dx\int_{x-a}^{a}f(x,y)dy$

(6) $\int_{0}^{\sqrt{2}}dy\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{y}{2}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}dy\int_{-\arccos\frac{y}{2}}^{\arccos\frac{y}{2}}f(x,y)dx$

(7) $\int_{0}^{1}dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

2. $\int_{0}^{1}dx\int_{-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$

$\int_{-1}^{0}dy\int_{-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

3. (1) $\dfrac{11}{40}$　(2) $\dfrac{5}{2}\pi$　(3) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{\pi}{4}$　(4) $\dfrac{1}{24}+\dfrac{\pi}{64}$　(5) $\dfrac{45}{32}\pi a^4$　(6) $\dfrac{1}{2}$　(7) $4a^3$　(8) $\dfrac{20}{3}$　(9) $\dfrac{\pi}{2}(2e^3-5)$　(10) $\dfrac{1}{11}$　(11) $\dfrac{\pi}{2}$　4. 1　5. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{e}-1\right)$

6. a　7. $\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi}{2}$　8. (1) $\dfrac{47}{30}\pi$　(2) $\pi(e-2)$　(3) $\dfrac{11}{60}\pi$　(4) $\pi\left(4\ln 2-\dfrac{5}{2}\right)$

(5) $\frac{1}{8}\pi a^4$　(6) 8π　9. $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\mathrm{d}t, -1$　10. 336π　11. $\frac{\pi}{2}$　12. $2a^2$　13. (1) $\frac{3}{4}\pi - e^2 - 1$　(2) $-a(2\pi a + c)$　(3) $-\frac{3}{2}\pi$　14. $S + 9e^4 - e^2 + 6$　15. $-6\pi^2$　16. 0　17. $n = 3, -\frac{79}{5}$　18. $a = \frac{1}{2}, b = 0$；$I = \frac{1}{2}x_1 y_1^2$　19. 4π　20. 0　21. $\frac{32}{5}\pi$　22. $R = \frac{4}{3}a$

练习题六

1.（提示）利用两个三维向量叉积的模的几何意义　2. $7x + 14y + 5 = 0$　3. $x - z + 4 = 0$ 或 $x + 20y + 7z - 12 = 0$　4. $\frac{x+1}{13} = \frac{y}{16} = \frac{z-1}{25}$　5. $\frac{x-1}{11} = \frac{y-2}{18} = \frac{z-1}{-1}$　6. $(8,4,-5)$　7. $\frac{4}{3}\sqrt{6}$　8. $(2y+z+1)^2 + 4(x+z)^2 + (x-2y-1)^2 = 36$　9. $\frac{7}{\sqrt{6}}$　10. $[\varphi(1)-\varphi'(1)](x-1)+[\psi'(-1)-1](y+1)+[\varphi'(1)-\psi'(-1)](z-1) = 0, \frac{x-1}{\varphi(1)-\varphi'(1)} = \frac{y+1}{\psi'(-1)-1} = \frac{z-1}{\varphi'(1)-\psi'(-1)}$
11. $9x + y - z = 27$ 或 $9x + 17y - 17z + 27 = 0$　12. $\begin{cases}14x + 11y - z - 26 = 0, \\ x - y + 3z + 8 = 0\end{cases}$
13. $x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$　14. 9π

练习题七

1. $S = 0$　（提示：将 $u_n = S_n - S_{n-1}$ 代入所给方程，得 S_n, S_{n-1} 满足的递推式）
2. (1) 收敛　(2) 发散　(3) 收敛　(4) 收敛　(5) 发散　(6) 收敛　(7) 收敛　(8) 收敛　3. 收敛　$\left(\text{提示：} a_1 = \sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{2^2}, \cdots, a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}, a_n \sim \frac{\pi}{2^n}\right)$
4. (1) 条件收敛　(2) 条件收敛　(3) 条件收敛　5. $p > 1$ 时绝对收敛，$0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛，$p \leqslant 0$ 时发散　6. $p > 1$ 时绝对收敛，$\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时条件收敛，$p \leqslant \frac{1}{2}$ 时发散　$\left(\text{提示：}\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$　7.（提示）与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 作比较　8.（提示）应用马克劳林展式，可证 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n^2}$　9. $\alpha = 1$ 时条件收敛，$\alpha \neq 1$ 时发散　（提示：$\alpha \neq 1$ 时应用加括号的级数发散则原级数也发散的性质）　10. $(-R, R), R = \max\{a, b\}$　11. $\left(\frac{1}{e}, e\right)$　12. (1) $\frac{1}{2}\sqrt{e} + 2$　(2) 1　(提示：

考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}$的和函数$\Big)$ 13. (1) $-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{n}x^n$,$(-1,1]$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n(2n-1)}x^{2n}$,$[-1,1]$

练习题八

1. (1) $x+\sqrt{x^2+y^2}=C$或$x-\sqrt{x^2+y^2}=Cy^2$ (2) $y^2=Ce^{-2x}-x^2$ (3) $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$ (4) $\tan\frac{y}{2}=Ce^{-x}+(1-x)$ 2. e^x或e^{-x} 3. e^x-1

4. $f(x)=e^{-x^2}$ (提示:$f(x)$满足微分方程$f'(x)+2xf(x)=0,f(0)=1$)

5. $z(x,y)=\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2+C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2$ $\Big($提示:微分方程化为$\frac{d^2z}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dz}{du}=u^2,u=\sqrt{x^2+y^2}$,再用降阶法化为一阶线性微分方程$\Big)$ 6. $\ln\frac{1+x^2}{2}$

7. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x-2x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}e^{2x}(\cos x+2\sin x)$

8. $y=\frac{1}{3}C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{3}e^x\ln(1+e^{-x})-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{1}{3}xe^{-2x}-\frac{1}{3}e^{-2x}\ln(1+e^{-x})$

9. $y=C_1e^x+C_2x$ (提示:作变换$y=e^xu$将原方程化简)